1ère S1

Contrôle du mardi 10 novembre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….………….

Note : ….. / 20

I. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{x+1}$.

Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

………..

………..

………..

………..

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2+4x-1$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Former, sans explications, le tableau de variations de *f* ; on complétera directement le tableau ci-dessous en utilisant la règle pour les flèches.

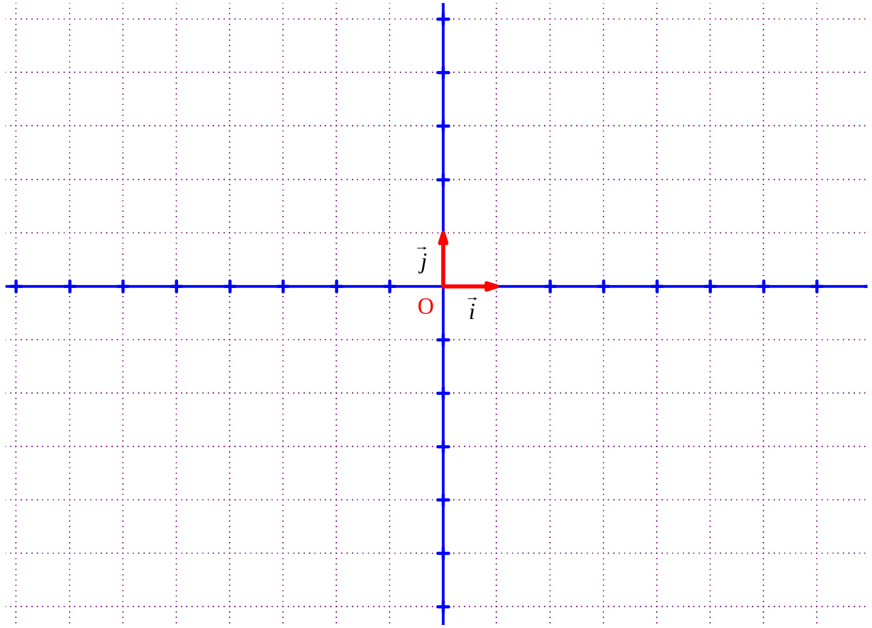
x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de *f*.

La fonction *f* est ……………………………………………………… sur l'intervalle ……………………. .

La fonction *f* est ……………………………………………………… sur l'intervalle ……………………. .

2°) Tracer avec soin sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite *D* d'équation $y = x-2$.



3°) On se propose de déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite *D*.

Compléter la phrase :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et *D* sont les solutions de l'équation

……………………………………………………………… .

Résoudre l'équation précédente au brouillon puis compléter la phrase :

$\mathscr{C} \cap D = \{\text{I} ; \text{J}\}$ avec I $\left|\begin{array}{l}\text{………………………} \\ \text{………………………}\end{array}\right.$ et J $\left|\begin{array}{l}\text{………………………} \\ \text{………………………}\end{array}\right.$

III. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4-3x \geqslant \dfrac{1}{x}$ (1).

On effectuera la résolution au brouillon et l'on complètera uniquement l'égalité ci-dessous donnant l'ensemble *S* des solutions de (1).

$S =$ ………………………….

IV. (2 points)

Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que son aire vaut 11 cm^2 et son périmètre vaut 16 cm.

On résoudra le problème au brouillon et l'on complètera la phrase suivante :

Les dimensions cherchées sont ……………………………………………………………. .

V. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(-5\,;2)$, $B(0\,;-3)$, $C(0\,;7)$, $D(-2\,;8)$.

1°) Donner une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (BC), (CD), (AD).

(AB) : …………………………………………….

(BC) : …………………………………………….

(CD) : …………………………………………….

(AD) : …………………………………………….

2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (AC) et (BD).
Aucun détail des calculs n'est demandé.

K a pour coordonnées ………………………………………… .

Corrigé du contrôle du 10-11-2015

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{x+1}$.

Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(x) = \frac{3\left[(x+1)-1\right]-5}{x+1}$$

$$= \frac{3(x+1)-8}{x+1}$$

$$= 3 - \frac{8}{x+1}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2+4x-1$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Former, sans explications, le tableau de variations de *f* ; on complétera directement le tableau ci-dessous en utilisant la règle pour les flèches.

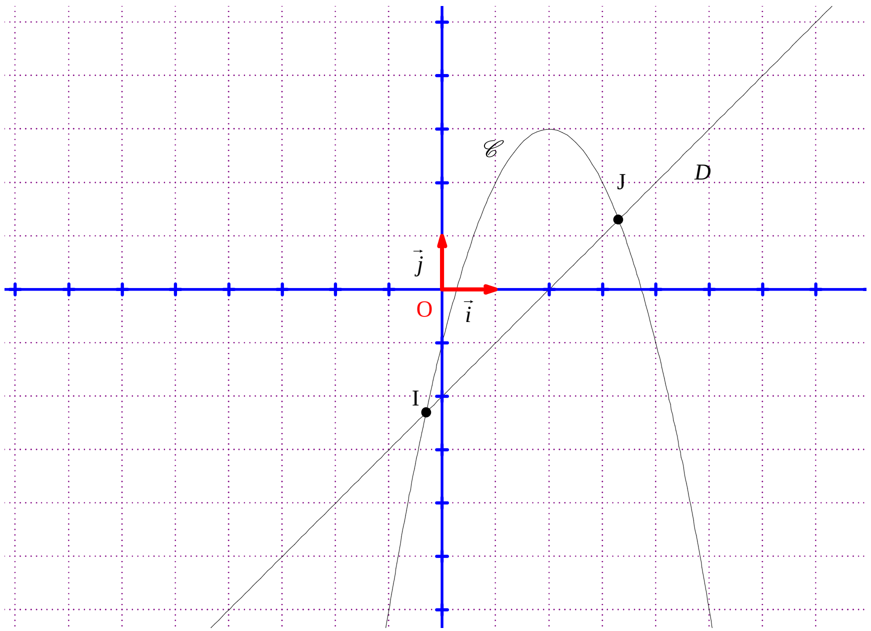
x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↗	3	↘

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de *f*.

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;2\right]$.

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[2\,;+\infty\right[$.

2°) Tracer avec soin sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite D d'équation $y = x-2$.



3°) On se propose de déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite *D*.

Compléter la phrase :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D sont les solutions de l'équation $-x^2+4x-1 = x-2$.

Résoudre l'équation précédente au brouillon puis compléter la phrase :

$$\mathscr{C} \cap D = \{\text{I}\,;\text{J}\} \text{ avec I} \left| \begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \\ \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{array} \right. \text{ et J} \left| \begin{array}{l} \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ \\ \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

L'équation $-x^2+4x-1 = x-2$ est équivalente à $-x^2+3x+1=0$.

Il s'agit d'une équation du second degré.

Son discriminant est égal à 13.

L'équation admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{-2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{-2}$.

On multiplie le numérateur et le dénominateur de x_1 et x_2 par – 1 (afin de ne pas avoir de signe – au dénominateur).

On obtient : $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

I et J ont donc pour abscisses respectives $x_{\mathrm{I}}=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_{\mathrm{J}}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Pour calculer l'ordonnée de I et de J, on peut soit utiliser l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ soit utiliser l'équation de la droite *D*.

Le plus simple en calculer est d'utiliser l'équation de la droite *D*.

$$y_{\mathrm{I}}=x_{\mathrm{I}}-2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}-2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ et } y_{\mathrm{J}}=x_{\mathrm{J}}-2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}-2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

On place I et J sur le graphique.
On vérifie sur le graphique que les valeurs trouvées coïncident.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4-3x\geqslant\dfrac{1}{x}$ (1).

On effectuera la résolution au brouillon et l'on complètera uniquement l'égalité ci-dessous donnant l'ensemble *S* des solutions de (1).

$$S=\left]-\infty\,;0\right]\cup\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$$

L'inéquation (1) est successivement équivalente à :

$4-3x-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$ (on passe tout à gauche ; on conserve le dénominateur)

$\dfrac{x(4-3x)-1}{x}\geqslant 0$

$\dfrac{4x-3x^2-1}{x}\geqslant 0$

$\dfrac{-3x^2+4x-1}{x}\geqslant 0$

On va utiliser un tableau de signes.

On considère le polynôme $-3x^2+4x-1$. Les racines sont 1 (racine évidente) et $\dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit).

Le tableau comporte trois lignes pour les signes : une ligne pour le signe de $-3x^2+4x-1$, une ligne pour le signe de *x*, une ligne pour le signe de $\dfrac{-3x^2+4x-1}{x}$.

Les valeurs charnières sont 1 et $\dfrac{1}{3}$ (pour le polynôme $-3x^2+4x-1$ au numérateur) et 0 (pour *x* au dénominateur).
Il y a donc 3 valeurs charnières que l'on range dans l'ordre croissant sur la première ligne du tableau.
Parmi ces 3 valeurs, il y a une valeur interdite qui est 0.

On n'oublie pas de mettre la double barre.

On peut vérifier l'ensemble des solutions de manière graphique en traçant la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ ainsi que la droite d'équation $y=4-3x$.

IV.

Déterminer les dimensions d'un rectangle sachant que son aire vaut 11 cm^2 et son périmètre vaut 16 cm.

On résoudra le problème au brouillon et l'on complètera la phrase suivante :

Les dimensions cherchées sont $4-\sqrt{5}$ cm (pour la largeur) et $4+\sqrt{5}$ (pour la longueur).

Soit *x* la longueur en centimètres et *y* la largeur en centimètres.

Les conditions se traduisent par : $\begin{cases} xy=11 \\ 2(x+y)=16 \end{cases}$.

Ce système est équivalent au système $\begin{cases} xy=11 \\ x+y=8 \end{cases}$ (en simplifiant la deuxième équation par 2).

Les réels *x* et *y* cherchés ont donc pour somme $S=8$ et pour produit $P=11$.
Ils sont donc solutions de l'équation $X^2-8X+11=0$.

On calcule le discriminant réduit :

$\Delta'=b'^2-ac$ (avec $a=1$, $b'=-4$, $c=11$)

$=(-4)^2-1\times 11$

$=16-11$

$=5$

Les racines de (E) sont $4-\sqrt{5}$ et $4+\sqrt{5}$.

Ce sont les dimensions cherchées.

Complément :

Comment savoir quelle est la largeur et quelle est la longueur du rectangle ?

On a : $-\sqrt{5}<\sqrt{5}$ donc par addition de 4 à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $4-\sqrt{5}<4+\sqrt{5}$.

La largeur d'un rectangle est le plus petit côté donc la largeur est égale à $4-\sqrt{5}$ et la longueur est égale à $4+\sqrt{5}$.

Autrement dit, $x=4+\sqrt{5}$ et $y=4-\sqrt{5}$.

V.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}\left(-5\,;2\right)$, $\mathrm{B}\left(0\,;-3\right)$, $\mathrm{C}\left(0\,;7\right)$, $\mathrm{D}\left(-2\,;8\right)$.

1°) Donner une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (BC), (CD), (AD).

On utilise le programme sur les équations cartésiennes de droites.

(AB) : $-5x-5y+15=0$ que l'on peut simplifier en $x+y-3=0$

(BC) : $10x=0$ que l'on peut simplifier en $x=0$

(CD) : $x+2y-14=0$

(AD) : $6x-3y+36=0$ que l'on peut simplifier en $2x-y+12=0$

Il est possible de simplifier certaines de ces équations.

● En divisant les deux membres de l'équation $-5x-5y+15=0$ par – 5 (c'est à dire en divisant la totalité du premier membre par – 5) et le second membre par – 5, on obtient une équation plus simple de la droite (AB) qui est $x+y-3=0$ (car 0 divisé par – 5 ça fait 0).

● En divisant les deux membres de l'équation $10x=0$ par 10, on obtient une équation plus simple de la droite (BC) qui est $x=0$ [en fait, la droite (BC) est confondue avec l'axe des ordonnées].

● Pour la droite (CD), on pourrait diviser par 2 mais on obtiendrait un coefficient de x égal à 1/2 qui est fractionnaire ; ce n'est pas ce qu'on cherche.

● En divisant les deux membres de l'équation $6x-3y+36=0$ par 3, on obtient une équation plus simple de la droite (AD) qui est $2x-y+12=0$.

2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (AC) et (BD).
Aucun détail des calculs n'est demandé.

K a pour coordonnées $\left(\dfrac{20}{13}\,;-\dfrac{71}{13}\right)$.

On cherche une équation cartésienne de (AC) et de (BD).
Pour cela, le plus astucieux est d'utiliser à nouveau le programme de la calculatrice.

(AC) : $5x-5y=35=0$ que l'on peut simplifier en $x-y+7=0$

(BD) : $11x+2y+6=0$

Les coordonnées du point K sont les solutions du système $\begin{cases} x-y+7=0 \\ 11x+2y+6=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

On peut le résoudre « à la main » (la méthode la plus simple ici est la substitution) ou si l'on est fainéant – ou plutôt astucieux – grâce à la calculatrice de collège Casio.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On résout le système « à la main » en utilisant la méthode des multiplicateurs.

$$\left\{\begin{array}{l|c|c} x-y+7=0 & \times 2 & \times(-11) \\ 11x+2y+6=0 & \times 1 & \times 1 \end{array}\right.$$

On obtient les équations $2\left(x-y+7\right)+\left(11x+2y+6\right)=0$ et $-11\left(x-y+7\right)+\left(11x+2y+6\right)=0$.

$$\begin{cases} 13x+20=0 \\ 13y-71=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{20}{13} \\ y=\dfrac{71}{13} \end{cases}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

On résout le système à l'aide de la calculatrice.

Pour résoudre le système à l'aide de la calculatrice, on doit d'abord réécrire le système sous la forme $\begin{cases} x-y=-7 \\ 11x+2y=-6 \end{cases}$.

On obtient $x=\dfrac{20}{13}$ et $y=-\dfrac{71}{13}$.

Donc $\mathrm{K}\left(\dfrac{20}{13}\,;-\dfrac{71}{13}\right)$.