TS1

Contrôle du samedi 3 octobre 2015 (2 heures)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. / 20

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors des réponses attendues.

I. (4 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z - 1 + \mathrm{i}\left(\bar{z} - 2\right) = 0 \qquad (1) \qquad ; \qquad z^4 + 7z^2 + 12 = 0 \qquad (2)$$

$S_1 =$	$S_2 =$ .....

II. (4 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des systèmes suivants d'inconnue $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\text{(I)} \begin{cases} 2z + 3z' = 8 - \mathrm{i} \\ 3z - z' = 1 + 4\mathrm{i} \end{cases} \qquad ; \qquad \text{(II)} \begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 5 \end{cases}$$

$S_1 =$	$S_2 =$ .....

III. (6 points)

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $z' = \mathrm{i}z^2 + 4\bar{z} - 4\mathrm{i}$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x', y' sont des réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$x' =$ ..... ; $y' =$ .....

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer les ensembles E et F suivants :

- E est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que z' soit réel ;
- F est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

On rédigera soigneusement en adoptant le modèle ci-contre (ne rien écrire dans ce cadre de rédaction) :

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Conclure :

E est …… (ne pas parler du point M dans la conclusion)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points)

1°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. On ne demande pas de le programmer sur calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel supérieur ou égal à 2)

Initialisation :
U prend la valeur $\frac{5}{2}$

Traitement :
Pour i allant de 2 à n **Faire**
  U prend la valeur $\frac{5U-4}{2U-1}$
FinPour

Sortie :
Afficher U

Faire fonctionner l'algorithme suivant « à la main » lorsque la valeur de n saisie en entrée est 4.
Écrire uniquement la valeur de U affichée en sortie (valeur exacte).

…….. (un seul résultat, sans égalité)

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = \frac{5}{2}$ et telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{2u_n - 1}$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ (on admettra que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n \neq 2$).

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{2 \times 3^n - 1}{3^n - 1}$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

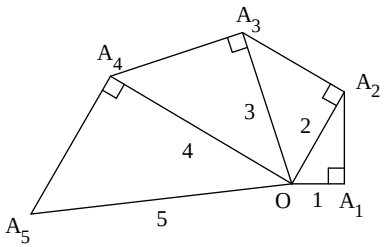
……..

……..

……..

V. (2 points)

On construit une suite de triangles rectangles selon le principe indiqué sur la figure ci-contre.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_1A_2...A_n$. Autrement dit, $L_n = A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $L_n = \sum_{k=.....}^{k=.....} .....$

(les « grands » pointillés sont à compléter par une expression en fonction de k).

2°) Programmer la suite (L_n) dans la calculatrice et déterminer le plus petit entier naturel n tel que $L_n \geqslant 100$.

…… (une seule réponse, sans égalité, sans justifier)

Corrigé du contrôle du 3-10-2015

I.

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z - 1 + \mathrm{i}\left(\bar{z} - 2\right) = 0 \qquad (1) \qquad ; \qquad z^4 + 7z^2 + 12 = 0 \qquad (2)$$

$S_1 = \varnothing$	$S_2 = \left\{2\mathrm{i}\,;-2\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$

Résolution de (1) :

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$.

$(1) \Leftrightarrow (a + \mathrm{i}b) - 1 + \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b - 2) = 0$

$\Leftrightarrow a + \mathrm{i}b - 1 + \mathrm{i}a + b - 2\mathrm{i} = 0$

$\Leftrightarrow a + b - 1 + \mathrm{i}(b + a - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ a + b - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$ impossible

Résolution de (2) :

On pose $Z = z^2$.

L'équation (2) s'écrit : $Z^2 + 7Z + 12 = 0 \quad (2')$.

$(2')$ est une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant vaut 1.

$(2')$ a pour racines -4 et -3.

$(2) \Leftrightarrow z^2 = -4$ ou $z^2 = -3$

$\Leftrightarrow z = 2\mathrm{i}$ ou $z = -2\mathrm{i}$ ou $z = \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs des systèmes suivants d'inconnue $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 2z + 3z' = 8 - \mathrm{i} \\ 3z - z' = 1 + 4\mathrm{i} \end{cases} \qquad ; \qquad (\mathrm{II}) \begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 5 \end{cases}$$

$S_1 = \left\{(1 + \mathrm{i}\,;2 - \mathrm{i})\right\}$	$S_2 = \left\{(1 - 2\mathrm{i}\,;1 + 2\mathrm{i})\,;(1 + 2\mathrm{i}\,;1 - 2\mathrm{i})\right\}$

Système (I) :

Il s'agit d'un système linéaire.

Son déterminant est égal à -11 donc il admet un unique couple solution.

On ne repasse surtout pas par les formes algébriques de z et z'.

La deuxième équation donne : $z' = 3z - (1 + 4\mathrm{i}) \quad (2')$.

On remplace dans la première équation.

$2z + 3\left[3z - (1 + 4\mathrm{i})\right] = 8 - \mathrm{i} \quad (1')$

$(1') \Leftrightarrow 11z - 3 - 12\mathrm{i} = 8 - \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 11z = 11 + 11\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$

$(2')$ donne alors $z' = 3(1 + \mathrm{i}) - (1 + 4\mathrm{i}) = 2 - \mathrm{i}$.

Système (II) :

Il ne s'agit pas d'un système linéaire.

Les nombres z et z' ont pour somme 2 et pour produit 5.

On sait que deux nombres complexes de somme S et de produit P sont solutions de l'équation $Z^2 - SZ + P = 0$.

Les nombres cherchés sont donc $\boxed{\text{les}}$ solutions de l'équation $Z^2 - 2Z + 5 = 0$ ($\boldsymbol{R}$) (équation résolvante).
Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant réduit est égal à $\Delta' = -4$.
$\Delta' < 0$ donc ($\boldsymbol{R}$) admet deux racines complexes conjuguées $Z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $Z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

III.

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $z' = \mathrm{i}z^2 + 4\bar{z} - 4\mathrm{i}$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x', y' sont des réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$$x' = 4x - 2xy \ ; \ \ y' = x^2 - y^2 - 4y - 4$$

$$\begin{aligned} z' &= \mathrm{i}z^2 + 4\bar{z} - 4\mathrm{i} \\ &= \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2 + 4(x-\mathrm{i}y) - 4\mathrm{i} \\ &= \mathrm{i}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) + 4(x-\mathrm{i}y) - 4\mathrm{i} \\ &= 4x - 2xy + \mathrm{i}(x^2 - y^2 - 4y - 4) \end{aligned}$$

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer les ensembles E et F suivants :

- E est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que z' soit réel ;
- F est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

On rédigera soigneusement en adoptant le modèle ci-contre :

> Soit M un point quelconque de P d'affixe z.
> On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.
>
> $\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$
> $\Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow$
>
> Conclure :
>
> E est …… (ne pas parler du point M dans la conclusion)

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0 \\ &\Leftrightarrow y' = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4y - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 4y + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (y+2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [x + (y+2)][x - (y+2)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y+2)(x-y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+y+2 = 0 \ \text{ ou } \ x-y-2 = 0 \end{aligned}$$

E est donc la réunion des droites d'équations cartésiennes $x + y + 2 = 0$ et $x - y - 2 = 0$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z' = 0 \\ &\Leftrightarrow x' = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 2xy = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(2-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ 2 - y = 0 \\ [\quad &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ y = 2\,] \end{aligned}$$

F est donc la réunion des droites d'équations $x = 0$ et $y = 2$.

IV.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. On ne demande pas de le programmer sur calculatrice.

> **Entrée :**
> Saisir n (entier naturel supérieur ou égal à 2)
>
> **Initialisation :**
> U prend la valeur $\frac{5}{2}$
>
> **Traitement :**
> **Pour** i allant de 2 à n **Faire**
> | U prend la valeur $\frac{5\mathrm{U} - 4}{2\mathrm{U} - 1}$
> **FinPour**
>
> **Sortie :**
> Afficher U

Faire fonctionner l'algorithme suivant « à la main » lorsque la valeur de n saisie en entrée est 4.
Écrire uniquement la valeur de U affichée en sortie (valeur exacte).

$\frac{161}{80}$ (un seul résultat, sans égalité)

Étape	1	2	3
i	2	3	4
Valeur de u	$\dfrac{5\times\frac{5}{2}-4}{2\times\frac{5}{2}-1}=\dfrac{25-8}{2\times4}=\dfrac{17}{8}$	$\dfrac{5\times\frac{17}{8}-4}{2\times\frac{17}{8}-1}=\dfrac{53}{8}\times\dfrac{4}{17-4}=\dfrac{53}{26}$	$\dfrac{5\times\frac{53}{26}-4}{2\times\frac{53}{26}-1}=\dfrac{161}{26}\times\dfrac{26}{80}=\dfrac{161}{80}$

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1=\dfrac{5}{2}$ et telle que pour tout entier naturel $n\geqslant1$, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{2u_n-1}$. Pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$ (on admettra que pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on a $u_n\neq2$).

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire que, pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on a : $u_n=\dfrac{2\times3^n-1}{3^n-1}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2}$$

$$=\frac{\frac{5u_n-4}{2u_n-1}-1}{\frac{5u_n-4}{2u_n-1}-2}$$

$$=\frac{\frac{5u_n-4-(2u_n-1)}{2u_n-1}}{\frac{5u_n-4-2(2u_n-1)}{2u_n-1}}$$

$$=\frac{\frac{5u_n-4-2u_n+1}{2u_n-1}}{\frac{5u_n-4-4u_n+1}{2u_n-1}}$$

$$=\frac{3u_n-3}{u_n-2}$$

$$=3\times\frac{u_n-1}{u_n-2}$$

$$=3\times v_n$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

On sait donc que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_n=v_1\times3^{n-1}$.

On calcule le premier terme de la suite.

$$v_1=\frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}-2}=3$$

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_n=3^n$.

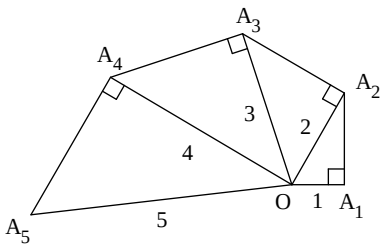
$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 3^n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 3^n(u_n-2)=u_n-1$ (produit en croix).

En développant le membre de gauche et arrangeant l'égalité, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n(3^n-1)=2\times3^n-1$.

On aboutit finalement à $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\dfrac{2\times3^n-1}{3^n-1}$.

V.

On construit une suite de triangles rectangles selon le principe indiqué sur la figure ci-contre.



Pour tout entier naturel $n\geqslant2$, on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_1A_2...A_n$. Autrement dit, $L_n=A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n$.

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $L_n=\displaystyle\sum_{k=.....}^{k=.....}$.....

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OA_kA_{k+1} rectangle en A_k.

On a : $A_kA_{k+1}{}^2=OA_{k+1}{}^2-OA_k{}^2$ soit $A_kA_{k+1}{}^2=(k+1)^2-k^2$ donc $A_kA_{k+1}{}^2=2k+1$.

On en déduit $A_kA_{k+1}=\sqrt{2k+1}$.

$$L_n=\sum_{k=1}^{k=n-1}A_kA_{k+1}=\sum_{k=1}^{k=n-1}\sqrt{2k+1}$$

Autre réponse possible :

$$L_n=\sum_{k=2}^{k=n}\sqrt{2k-1}$$

2°) Programmer la suite (L_n) dans la calculatrice et déterminer le plus petit entier naturel n tel que $L_n \geqslant 100$.

23 (une seule réponse, sans égalité, sans justifier)

On rentre la suite (L_n) de la manière suivante dans la calculatrice.

$n\text{Min} = 2$

$\text{u}(n) = \sum_{\text{K}=1}^{n-1} \sqrt{2\text{K}+1}$

$\text{u}(n\text{Min}) =$

$n\text{Min} = 2$ car (L_n) est définie à partir de $n \geqslant 2$.

$\text{u}(n\text{Min}) =$: ne rien écrire