$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 15 octobre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….…………

Note : ….. / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère le polynôme $P(x)=-x^2-2x+3$.

1°) Déterminer la forme canonique de $P(x)$.

$P(x)=$ ……………………………………………

$=$ ……………………………………………

$=$ ……………………………………………

$=$ ……………………………………………

2°) Calculer le discriminant Δ de $P(x)$.

$\Delta=$ ……………………………………………

$=$ ……………………………………………

$=$ ……………………………………………

II. (1 point)

On considère le polynôme $P(x)=mx^2-(2m+1)x+m-1$ où m est un réel non nul.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de m.

$\Delta=$ ……………………………

(un seul résultat sous forme développée)

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

1°) Compléter la phrase : $\sqrt{x}$ existe si et seulement si ……………. .

2°) Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectivement des équations (1) et (2) et des inéquations (3) et (4) suivantes (recherche au brouillon) : $\sqrt{x}=2$ (1) ; $\sqrt{x}=-1$ (2) ; $\sqrt{x}\leqslant 1$ (3) ; $\sqrt{x}>-1$ (4).

$S_1=$ …………………	$S_2=$ …………………	$S_3=$ …………………	$S_4=$ …………………

IV. (1 point)

On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et D la droite d'équation $y=ax$ où a est un réel strictement positif donné dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Exprimer en fonction de a l' (les) abscisse(s) du (des) point(s) d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

…………………………………………………..………

Répondre sans écrire d'égalités, sans faire de phrases (calculs au brouillon).

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible.

Rédiger la recherche par chaîne d'équivalences selon le modèle donné dans chaque question.
Conclure par une égalité d'ensembles : $\mathscr{D}=$…… en utilisant les notations adéquates.

1°) $f : x \mapsto x+2\sqrt{1-x}$

$f(x)$ existe si et seulement si ………………………………………………

si et seulement si ………………………………………………

$\mathscr{D}=$ ………..

2°) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-4}$

$f(x)$ existe si et seulement si ………………………………………………

si et seulement si ………………………………………………

si et seulement si ………………………………………………

$\mathscr{D}=$ ………..

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) On note D la droite d'équation $3x-5y+2=0$.

On note A et B les points d'intersection respectifs de D avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Compléter directement sur cette feuille les phrases suivantes (calculs au brouillon).

A a pour abscisse ………….. (un seul résultat sans égalité).

B a pour ordonnée ………….. (un seul résultat sans égalité).

2°) Déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par le point $\mathrm{C}\left(-2\,;1\right)$ et de coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VII. (4 points : 2 points pour chaque système)

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(I) $\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

Dans chaque cas, calculer le déterminant du système puis résoudre le système en utilisant la méthode des multiplicateurs (compléter les pointillés).

Système (I) :

Le déterminant du système (I) est égal à …….. .

Le déterminant est non nul donc le système (I) admet

…………………………………………………………… .

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le couple solution de (I) est : ……………….. .

Système (II) :

Le déterminant du système (II) est égal à …….. .

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet

…………………………………………………………… .

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le couple solution de (II) est : ……………….. .

Corrigé du contrôle du 15-10-2015

I.

On considère le polynôme $P(x) = -x^2 - 2x + 3$.

1°) Déterminer la forme canonique de $P(x)$.

$P(x) = -\left(x^2 + 2x - 3\right)$

$= -\left[(x+1)^2 - 1 - 3\right]$

$= -(x+1)^2 + 4$

2°) Calculer le discriminant Δ de $P(x)$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3$

$= 4 + 12$

$= 16$

II.

On considère le polynôme $P(x) = mx^2 - (2m+1)x + m - 1$ où m est un réel non nul.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de *m*.

$$\Delta = 8m + 1$$

(un seul résultat sous forme développée)

Le réel *m* est un paramètre.

$P(x)$ est un polynôme du second degré qui dépend d'un paramètre.

Les coefficients du polynôme sont $a = m$ (coefficient de x^2), $b = -(2m+1)$ (coefficient de *x*), $c = m - 1$.

$\Delta = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4m \times (m-1)$

$= (2m+1)^2 - 4m^2 + 4m$

$= \left(4m^2 + 4m + 1\right) - 4m^2 + 4m$

$= 1 + 8m$

III.

1°) Compléter la phrase : $\sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$.

2°) Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectivement des équations (1) et (2) et des inéquations (3) et (4) suivantes (recherche au brouillon) : $\sqrt{x} = 2$ (1) ; $\sqrt{x} = -1$ (2) ; $\sqrt{x} \leqslant 1$ (3) ; $\sqrt{x} > -1$ (4).

$S_1 = \{4\}$	$S_2 = \varnothing$	$S_3 = [0\,;1]$	$S_4 = [0\,;+\infty[$

L'équation (2) et l'inéquation (4) se résolvent par « logique » et non par calcul.

(1) : Le seul nombre dont la racine carrée vaut 2 est 4.

(2) : Il n'existe aucun réel dont la racine carrée vaut – 1 car la racine carrée de tout réel positif ou nul est positive ou nulle.

(3) : Les nombres dont la racine carrée est inférieure ou égale à 1 sont tous les nombres de l'intervalle $[0\,;1]$.

En effet, dans $\mathbb{R}_+$, l'inéquation (3) est successivement équivalente à :

$\left(\sqrt{x}\right)^2 \leqslant 1$

$x \leqslant 1$

(4) : Tous les réels positifs ou nuls ont une racine carrée supérieure ou égale à 0.
Or 0 est strictement supérieure à – 1 donc tous les réels positifs ou nuls ont une racine carrée strictement supérieure à – 1. Donc tous les réels positifs ou nuls sont solutions de l'inéquation (4).

IV.

On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et *D* la droite d'équation $y = ax$ où *a* est un réel strictement positif donné dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Exprimer en fonction de *a* l' (les) abscisse(s) du (des) point(s) d'intersection de $\mathscr{C}$ et *D*.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \text{ et } -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Répondre sans écrire d'égalités, sans faire de phrases (calculs au brouillon).

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et *D* sont les solutions de l'équation $\dfrac{1}{x} = ax$ (1).

On résout (1) dans $\mathbb{R}^*$.

(1) est successivement équivalente à :

$ax^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{a}$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{a}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

V.

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible.

Rédiger la recherche par chaîne d'équivalences selon le modèle donné dans chaque question.
Conclure par une égalité d'ensembles : $\mathcal{D} = \ldots\ldots$ en utilisant les notations adéquates.

1°) $f : x \mapsto x + 2\sqrt{1-x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $1 - x \geqslant 0$

si et seulement si $x \leqslant 1$

$$\mathcal{D} =]-\infty\,;1]$$

2°) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-4}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$

si et seulement si $x^2 \neq 4$

si et seulement si $x \neq 2$ et $x \neq -2$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$$

VI.

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) On note D la droite d'équation $3x - 5y + 2 = 0$.

On note A et B les points d'intersection respectifs de D avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Compléter directement sur cette feuille les phrases suivantes (calculs au brouillon).

A a pour abscisse $-\dfrac{2}{3}$ (un seul résultat sans égalité).

B a pour ordonnée $\dfrac{2}{5}$ (un seul résultat sans égalité).

On sait que A appartient à la droite D donc $3x_{\mathrm{A}} - 5y_{\mathrm{A}} + 2 = 0 \quad (1)$.
De plus, A appartient à l'axe des abscisses donc $y_{\mathrm{A}} = 0 \quad (2)$.

Donc, compte tenu de (2), l'égalité (1) donne $3x_{\mathrm{A}} + 2 = 0$ d'où $x_{\mathrm{A}} = -\dfrac{2}{3}$.

De même pour B.
On sait que B appartient à la droite D donc $3x_{\mathrm{B}} - 5y_{\mathrm{B}} + 2 = 0 \quad (3)$.
De plus, B appartient à l'axe des ordonnées donc $y_{\mathrm{B}} = 0 \quad (4)$.

Donc, compte tenu de (4), l'égalité (3) donne $-5y_{\mathrm{B}} + 2 = 0$ d'où $y_{\mathrm{B}} = \dfrac{2}{5}$.

2°) Déterminer l'équation réduite de la droite D' passant par le point $\mathrm{C}(-2\,;1)$ et de coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$.
On applique directement la formule du cours donnant l'équation d'une droite passant par un point donné et de coefficient directeur donné.

D' a pour équation $y = -\dfrac{2}{3}(x+2) + 1$ soit $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

Attention, une équation de droite est une égalité. Elle doit donc comporter un signe = .
Certains élèves ont juste écrit $-\dfrac{2}{3}(x+2)+1$ ce qui est faux.
Comme il s'agit d'une équation réduite, le résultat doit être donné sous la forme $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

VII.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(I) $\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

Dans chaque cas, calculer le déterminant du système puis résoudre le système en utilisant la méthode des multiplicateurs (compléter les pointillés).

Système (I) :

Le déterminant du système (I) est égal à 1.

Le déterminant est non nul donc le système (I) admet un unique couple solution.

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l} \times 3 & \times(-2) \\ \times(-4) & \times 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1x=-10 \\ 1y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-10 \\ y=7 \end{cases}$$

Le couple solution de (I) est : $(-10\,;7)$.

Système (II) :

Le déterminant du système (II) est égal à 17.

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet un unique couple solution.

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l} \times 3 & \times(-2) \\ \times 4 & \times 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 17x=23 \\ 17y=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{23}{17} \\ y=\dfrac{13}{17} \end{cases}$$

Le couple solution de (II) est : $\left(\dfrac{23}{17}\,;\dfrac{13}{17}\right)$.

Pour le déterminant du système (I), on calcule $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\times 3-2\times 4=9-8=1$.

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l} \times 3 & \times(-2) \\ \times(-4) & \times 3 \end{array}$$

On utilise les multiplicateurs de la première colonne (3 et – 4) pour trouver x.

Avec les multiplicateurs placés dans la 1ère colonne, on multiplie les deux membres de la première équation par 3 et les deux membres de deuxième équation par – 4.
Cela donne le système suivant (que l'on n'écrit pas, on effectue les calculs dans la tête) :

$$\begin{cases} 9x+12y=-6 \\ -8x-12y=-4 \end{cases}$$

On additionne ensuite membre à membre les deux équations et l'on obtient :

$9x-8x=-6-4$ (on écrit pas $12y-12y$ puisque l'on peut tout de suite dire que ça fait 0)

$x=-10$

Les multiplicateurs de cette colonne ont été choisis de sorte que les y se simplifient par addition membre à membre.

On utilise les multiplicateurs de la deuxième colonne (– 2 et 3) pour trouver y.

● Beaucoup d'élèves se sont trompés dans les calculs de déterminants. Il n'y avait cependant pas de pénalité pour ce type d'erreur.

● On pouvait utiliser la calculatrice grâce à l'application de résolution des systèmes pour vérifier le résultat.