TS1

Contrôle du mardi 6 octobre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………...…………… **Note : ……../ 20**

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -\dfrac{3}{4}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}}$ pour tout entier naturel n. On admettra que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

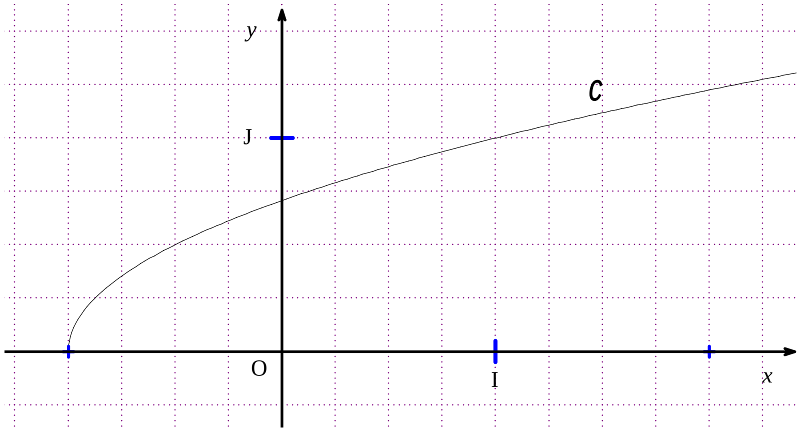
1°) Sur le graphique ci-dessous, on donne la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Effectuer avec soin sur ce graphique la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_3 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits de construction apparents. Utiliser des pointillés pour le tracé des « marches d'escalier ».

Ne pas écrire de valeurs sur l'axe des abscisses (sauf éventuellement la valeur de u_0 si on le désire).

On se contentera d'écrire u_0, u_1, u_2, u_3.



2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < 1$.

II. (6 points)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble *I*.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).
Dans chaque cas, on attend le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé et réduit.

1°)	$f(x)=\left(x^2+2x-1\right)\sqrt{1-x}$	$I=]-\infty\,;1[$	$f'(x)=$ ....
2°)	$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+3}$	$I=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$	$f'(x)=$ ....
3°)	$f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}$	$I=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=$ ....

III. (2 points)

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x\mapsto \dfrac{x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Démontrer que pour tout réel $x\neq -1$, on a : $f_n'(x)=\dfrac{1+(1-n)x}{(1+x)^{n+1}}$.

On écrira : $f_n(x)=x\times\dfrac{1}{(1+x)^n}$. On attend deux lignes de calculs avant de donner le résultat final.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f_n'(x)=$ ....

$=$ ....

$=$ .... (résultat final)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Pour tout réel $a>0$, on considère la fonction $f_a : x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+a}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1°) Calculer $f_a'(x)$ pour $x>0$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé réduit.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f_a'(x)=$ .... (un seul résultat)

2°) On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$. On note I_a le point de $\mathcal{C}_a$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Démontrer que I_a appartient à la courbe Γ d'équation $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

....

....

....

....

....

....

V. (2 points)

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $I=[-5\,;5]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		3		5
$f(x)$	1	↗	5	↘	2	↗	4

On suppose que F est une primitive de *f* sur l'intervalle *I*.
Déterminer le sens de variation de F sur *I*. Rédiger avec le plus de concision possible.

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 6-10-2015

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -\frac{3}{4}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}$ pour tout entier naturel *n*. On admettra que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 0$.

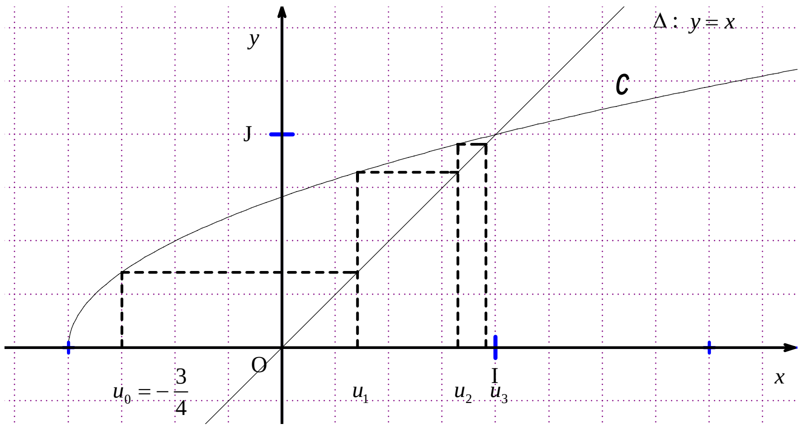
1°) Sur le graphique ci-dessous, on donne la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Effectuer avec soin sur ce graphique la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_3 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits de construction apparents. Utiliser des pointillés pour le tracé des « marches d'escalier ».

Ne pas écrire de valeurs sur l'axe des abscisses (sauf éventuellement la valeur de u_0 si on le désire).

On se contentera d'écrire u_0, u_1, u_2, u_3.



On vérifie la construction sur l'écran de la calculatrice graphique.

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n < 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.

Comme $u_0 = -\frac{3}{4}$ par définition de la suite, on a $u_0 < 1$.

La phrase $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k < 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} < 1$.

On a : $u_k < 1$ par hypothèse de récurrence.

Donc $u_k + 1 < 2$.

D'où $\frac{u_k + 1}{2} < 1$.

Par suite, $\sqrt{\frac{u_k + 1}{2}} < 1$ soit $u_{k+1} < 1$.

On en déduit que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

II.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble *I*.

Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

Dans chaque cas, on attend le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé et réduit.

1°)	$f(x) = (x^2 + 2x - 1)\sqrt{1-x}$	$I =]-\infty\,;1[$	$f'(x) = \frac{-5x^2 - 2x + 5}{2\sqrt{1-x}}$
2°)	$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x+3}$	$I = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$	$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 4}{(x+3)^2}$
3°)	$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$	$I = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{x-4}{x^3}$

1°)

$$\forall x \in I \quad f\,'(x) = (2x+2)\times\sqrt{1-x} + \left(x^2+2x-1\right)\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) \quad \text{(calcul avec sous-dérivée)}$$

$$= (2x+2)\times\sqrt{1-x} - \frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(2x+2)\times\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - \left(x^2+2x-1\right)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(2x+2)\times(1-x) - \left(x^2+2x-1\right)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2\left(2x-2x^2+2-2x\right) - \left(x^2+2x-1\right)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2\left(-2x^2+2\right) - \left(x^2+2x-1\right)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-4x^2+4-x^2-2x+1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{-5x^2-2x+5}{2\sqrt{1-x}}$$

2°)

$$\forall x \in I \quad f\,'(x) = \frac{(2x-1)(x+3)-\left(x^2-x+1\right)}{(x+3)^2} \quad \text{(dérivée d'un quotient)}$$

$$= \frac{2x^2+6x\cancel{-x}-3-x^2\cancel{+x}-1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2+6x-4}{(x+3)^2}$$

3°)

$$\forall x \in I \quad f\,'(x) = 2\times\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{(formule de dérivée de } \frac{1}{x^n}\text{)}$$

$$= -\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x-4}{x^3}$$

III.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Démontrer que pour $x \neq -1$, on a : $f_n\,'(x) = \dfrac{1+(1-n)x}{(1+x)^{n+1}}$.

On écrira : $f_n(x) = x \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$. On attend deux lignes de calculs avant de donner le résultat final.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f_n\,'(x) = 1\times\frac{1}{(1+x)^n} + x\times\left[-\frac{n}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n} - \frac{nx}{(1+x)^{n+1}}$$

$$= \frac{1+(1-n)x}{(1+x)^{n+1}} \quad \text{(résultat final)}$$

IV.

Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+a}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1°) Calculer $f_a\,'(x)$ pour $x > 0$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur développé réduit.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a\,'(x) = \frac{a-x}{2\sqrt{x}\,(x+a)^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+a) - \sqrt{x}}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+a-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+a-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{\frac{a-x}{2\sqrt{x}}}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{a-x}{2\sqrt{x}(x+a)^2}$$

2°) On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. On note I_a le point de $\mathcal{C}_a$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Démontrer que I_a appartient à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La tangente est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est égal à 0.

On résout l'équation $f_a'(x) = 0 \quad (1)$.

Dans $\mathbb{R}_+^*$, $(1) \Leftrightarrow x = a$ qui est bien solution car $a > 0$ par hypothèse.

$$f_a(a) = \frac{\sqrt{a}}{a+a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\times\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{a}}}{2\cancel{\sqrt{a}}\times\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Le point I_a de $\mathcal{C}_a$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(a\,;\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)$.

De manière évidente, on a : $y_{\mathrm{I}_a} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_{\mathrm{I}_a}}}$ donc I_a appartient à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

V.

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $I = [-5\,;5]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		3		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	4

On suppose que F est une primitive de *f* sur l'intervalle *I*.
Déterminer le sens de variation de F sur *I*. Rédiger avec le plus de concision possible.

On sait que F est une primitive de *f* sur *I* donc F est dérivable sur *I* et $\forall x \in I \quad \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Or d'après le tableau de variations, les valeurs de $f(x)$ sont comprises entre 1 (minimum) et 5 (maximum) au sens large.

Donc $\forall x \in I \quad f(x) > 0$ ce qui donne $\forall x \in I \quad \mathrm{F}'(x) > 0$.

On en déduit que F est strictement croissante sur *I*.