TS1

Contrôle du mardi 22 septembre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………………

Note : …….. / 20

I. (3 points)

On pose $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_3 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Calculer $z_1 z_2 z_3$, $\dfrac{z_1 z_3}{{z_2}^2}$, $\dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_3}$. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z_1 z_2 z_3 =$ ……………………….	$\dfrac{z_1 z_3}{{z_2}^2} =$ ……………………….	$\dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_3} =$ ……………………….

II. (8 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe z (résolution au brouillon). On écrira les solutions sous forme algébrique.

$$2z - 1 + \mathrm{i}(z - 2) = 0 \quad (1)\ ;\ 2z - 1 + \mathrm{i}(\overline{z} - 2) = 0 \quad (2)\ ;\ z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0 \quad (3)\ ;\ \frac{\mathrm{i}z - 1}{z} = \frac{z}{\mathrm{i}z - 1} \quad (4).$$

$S_1 =$ ……………………….	$S_2 =$ ……………………….	$S_3 =$ ……………………….	$S_4 =$ ……………………….

III. (10 points : 1°) 4 points ; 2°) 4 points ; 3°) 2 points)

Pour tout nombre complexe z distinct de i, on pose $z' = \dfrac{z}{z - \mathrm{i}}$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;y) \neq (0\,;1)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
Il est demandé de ne pas développer les dénominateurs.

Donner les réponses dans le cadre ci-dessous et détailler les calculs sur les lignes ci-contre.
Tirer les traits de fractions à la règle.

$\mathrm{Re}\, z' =$ ………………………	$\mathrm{Im}\, z' =$ ………………………

2°) On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$ tels que z' soit imaginaire pur.

On rédigera ainsi la recherche (modèle à recopier) :

> Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$.
> On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y) \neq (0\,;1)$.
>
> $\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow z'$ imaginaire pur
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….

On conclura de la manière suivante : « L'ensemble E est …………………………………………………… ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Cette question est indépendante des précédentes. Il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique de z.

Soit z un nombre complexe distinct de i.
Démontrer que l'on a : $\overline{z'-1} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\bar{z} - 1}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 22-9-2015

I.

On pose $z_1 = 1-2\mathrm{i}$, $z_2 = 1+\mathrm{i}$ et $z_3 = 1+2\mathrm{i}$.

Calculer $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1z_3}{{z_2}^2}$, $\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3}$. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z_1z_2z_3 = 5+5\mathrm{i}$	$\dfrac{z_1z_3}{{z_2}^2} = -\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$	$\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3} = \dfrac{-7-\mathrm{i}}{5}$

On vérifie tous ces résultats à l'aide de la calculatrice.

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe *z* (résolution au brouillon). On écrira les solutions sous forme algébrique.

$2z-1+\mathrm{i}(z-2)=0 \quad (1)$; $2z-1+\mathrm{i}(\overline{z}-2)=0 \quad (2)$; $z^2-2\sqrt{2}z+3=0 \quad (3)$; $\dfrac{\mathrm{i}z-1}{z}=\dfrac{z}{\mathrm{i}z-1} \quad (4)$.

$S_1=\left\{\dfrac{4+3\mathrm{i}}{5}\right\}$	$S_2=\{\ \mathrm{i}\ \}$	$S_3=\left\{\sqrt{2}+\mathrm{i}\,;\sqrt{2}-\mathrm{i}\right\}$	$S_4=\left\{\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\,;\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2}\right\}$

$(1) \Leftrightarrow z(2+\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4+3\mathrm{i}}{5}$

Pour l'équation (2), on pose $z=a+\mathrm{i}b$ où *a* et *b* sont deux réels.

$(2) \Leftrightarrow 2(a+\mathrm{i}b)-1+\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b-2)=0$

$\Leftrightarrow 2a+2\mathrm{i}b-1+\mathrm{i}a+b-2\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow 2a+b-1+\mathrm{i}(a+2b-2)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b-1=0 \\ a+2b-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ (résolution par combinaisons)

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$

(3) est une équation du second degré de discriminant réduit $\Delta' = -1$.

On résout l'équation (4) dans $\mathbb{C}\setminus\{0\,;-\mathrm{i}\}$.

$(4) \Leftrightarrow (\mathrm{i}z-1)^2=z^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}z-1=z$ ou $\mathrm{i}z-1=-z$

$\Leftrightarrow (\mathrm{i}-1)z=1$ ou $(\mathrm{i}+1)z=1$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{\mathrm{i}-1}$ ou $z=\dfrac{1}{\mathrm{i}+1}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{\mathrm{i}+1}{-2}$ ou $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-\dfrac{\mathrm{i}+1}{2}$ ou $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ (ces deux solutions conviennent car elles sont différentes de 0 et de – i)

On pouvait aussi adopter la méthode un peu plus maladroite consistant à tout développer ce qui conduisait à une équation du second degré à coefficients complexes dont le discriminant est réel.

III.

Pour tout nombre complexe *z* distinct de i, on pose $z'=\dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$.

1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où *x* et *y* sont deux réels tels que $(x\,;y)\neq(0\,;1)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de *x* et *y*.
Il est demandé de ne pas développer les dénominateurs.

Donner les réponses dans le cadre ci-dessous et détailler les calculs sur les lignes ci-contre.

$\operatorname{Re} z' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+\left(y-1\right)^2}$	$\operatorname{Im} z' = \dfrac{x}{x^2+\left(y-1\right)^2}$

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{z}{z-\mathrm{i}}\\
&= \frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y-\mathrm{i}}\\
&= \frac{x+\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}\left(y-1\right)}\\
&= \frac{\left(x+\mathrm{i}y\right)\left[x-\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]}{\left[x+\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]\times\left[x-\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]}\\
&= \frac{\left(x+\mathrm{i}y\right)\left[x-\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]}{\left[x+\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]\times\left[x-\mathrm{i}\left(y-1\right)\right]}\\
&= \frac{x^2+y^2-y-\mathrm{i}x\left(y-1\right)+\mathrm{i}xy}{x^2+\left(y-1\right)^2}\\
&= \frac{x^2+y^2-y+\mathrm{i}x}{x^2+\left(y-1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Donc $\operatorname{Re} z' = \dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+\left(y-1\right)^2}$ et $\operatorname{Im} z' = \dfrac{x}{x^2+\left(y-1\right)^2}$.

2°) On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$ tels que z' soit imaginaire pur.

On rédigera ainsi (modèle à recopier) :

> Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$.
> On pose $z = x+\mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $\left(x\,;\,y\right) \neq \left(0\,;1\right)$.
>
> $\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow z'$ imaginaire pur
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….

On conclura de la manière suivante : « L'ensemble E est ……………………………………………………… ».

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq \mathrm{i}$.
On pose $z = x+\mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $\left(x\,;\,y\right) \neq \left(0\,;1\right)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow z' \text{ imaginaire pur}\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Re} z' = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-y}{x^2+\left(y-1\right)^2} = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-y=0\\ x^2+\left(y-1\right)^2 \neq \left(0\,;1\right)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\\ x^2+\left(y-1\right)^2 \neq \left(0\,;1\right)\end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble E est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point $\mathrm{A}\left(1\right)$.

Remarque :

Le centre a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ a donc pour affixe $0+\mathrm{i}\times\dfrac{1}{2}$.

3°) Cette question est indépendante des précédentes. Il est demandé de ne pas utiliser la forme algébrique de z.

Soit z un nombre complexe distinct de i.
Démontrer que l'on a : $\overline{z'-1} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\bar{z}-1}$.

$$
\begin{aligned}
z'-1 &= \frac{z}{z-\mathrm{i}}-1\\
&= \frac{z}{z-\mathrm{i}}-1\\
&= \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{z'-1} &= \overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)}\\
&= \frac{\overline{\mathrm{i}}}{\overline{z-\mathrm{i}}}\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\bar{z}+\mathrm{i}}\\
&= \frac{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}}{\left(\bar{z}+\mathrm{i}\right)\times\mathrm{i}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\bar{z}-1}
\end{aligned}
$$