TS1

Contrôle du lundi 11 mai 2015 (3 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

• On rédigera sur des copies séparées l'enseignement obligatoire et l'enseignement de spécialité.

• On accordera une attention tout particulière au soin et à la rédaction ; en particulier, on encadrera tous les résultats demandés en rouge à la règle.

Enseignement obligatoire (note sur 20)

I. (4 points)

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau au verso avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies. Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

Dans les questions 2°) et 3°), le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ.

Un argument de $\dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a. $\theta - \dfrac{\pi}{3}$ b. $\theta + \dfrac{2\pi}{3}$ c. $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$ d. $\theta - \dfrac{2\pi}{3}$

2°) L'ensemble des points M de *P* d'affixe z tels que $(1+\text{i})z$ soit un réel positif ou nul est :

a. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
b. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$.
c. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{v}-\vec{u}$.
d. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $-\vec{u}-\vec{v}$.

3°) Le point de *P* d'affixe $(1+\text{i})^{2014}$ appartient à :

a. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{u}$.
b. la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $-\vec{u}$.
c. la demi-droite fermée d'origine O et dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{v}$.
d. la demi-droite fermée d'origine O et dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $-\vec{v}$.

4°) Soit n un entier naturel.

Le nombre $\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

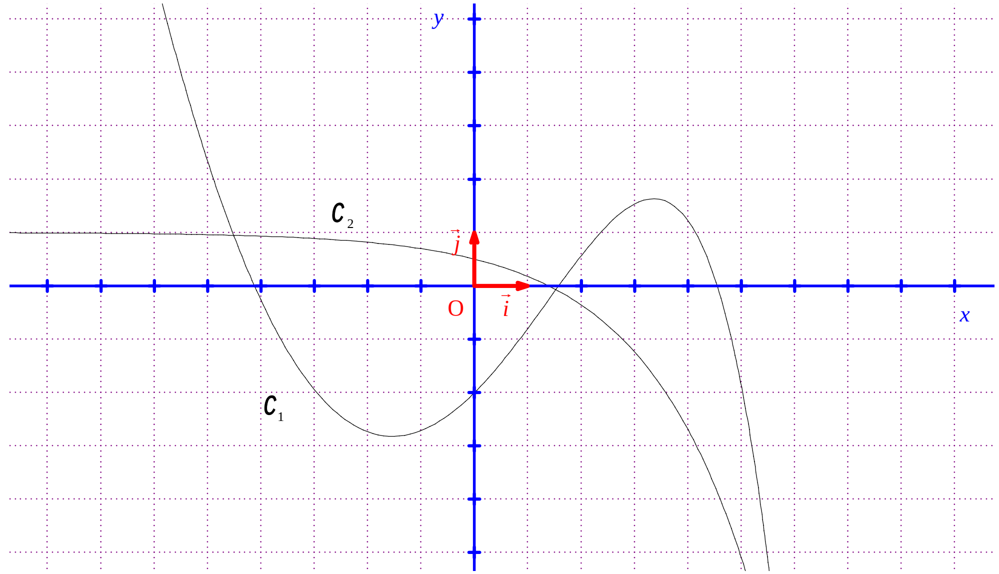
a. $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$
b. $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$
c. $3k$ avec $k \in \mathbb{N}$
d. $6k$ avec $k \in \mathbb{N}$

II. (4 points : 1°) 1 ; 2°) 1 + 1 ; 3°) 1)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	b	↘	$-\infty$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



1°) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'.
Justifier la réponse.
2°) À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,

• encadrer a par deux entiers consécutifs (sans justifier) ;

• le signe de b (en justifiant brièvement).

3°) Quelle propriété permet d'affirmer que la fonction f s'annule exactement en deux réels x_1 et x_2 ?
Déterminer à l'aide du graphique un encadrement de x_1 et x_2 par deux entiers consécutifs.

III. (5 points : 1°) 1 ; 2°) 1 + 1 ; 3°) 1 ; 4°) 1)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.

1°) Calculer la valeur exacte de u_1 (on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$).
2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et démontrer que (u_n) converge.
3°) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$.

IV. (3 points : 1 point par réponse)

À un feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance. À 12 heures, le feu se met au rouge et un piéton se présente à un instant au hasard entre 12 heures et 12 heures 05 pour traverser. La variable aléatoire T qui donne le temps écoulé, en secondes, entre 12 heures et l'heure d'arrivée du piéton suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;300]$.
On donnera directement les résultats sous forme décimale sur la feuille de réponses sans faire de phrases.
Calculer la probabilité que le piéton :
a) trouve le feu vert et passe sans attendre ;
b) n'attende pas le feu vert plus de 15 secondes ;
c) attende le feu vert plus de 30 secondes.

V. (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x = -3-2t \\ y = 4+t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $D' \begin{cases} x = -2+t' \\ y = -4+2t' \\ z = -8+2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

ainsi que le plan P d'équation $z = -4$.
On considère également les points $\mathrm{A}(-2\,;3\,;-4)$ et $\mathrm{B}(4\,;1\,;0)$.

Pour chaque affirmation, dire sans justifier si elle est vraie ou fausse (compléter le tableau donné sur la feuille de réponse par V ou F).
Chaque réponse juste rapporte 1 point ; chaque réponse fausse ou absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée.

1°) Les droites D et (AB) sont sécantes.

2°) Les droites D, D' et (AB) sont concourantes.

3°) Les droites D, D' et (AB) sont coplanaires.

4°) Les plans (OAB) et P sont sécants.

Feuille à remettre dans la copie

Prénom : ………………………….… Nom : ……………………………….….…………..

I. (4 points)

Question	1°	2°	3°	4°	**Total**
Réponse					

IV. (3 points)

• Probabilité que le piéton trouve le feu vert et passe sans attendre : …………………

• Probabilité que le piéton n'attende pas le feu vert plus de 15 secondes : …………………

• Probabilité que le piéton attende le feu vert plus de 30 secondes : …………………

V. (4 points)

Question	1°	2°	3°	4°	**Total**
Réponse					

Enseignement de spécialité (note sur 20)

I. (12 points : 1°) 2 ; 2°) 2 + 2 ; 3°) 6)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ où α est un réel fixé.

1°) Calculer A^2.

2°) Soit p un entier naturel quelconque.
Déterminer la matrice A^{2p} ; en déduire la matrice A^{2p+1}.

3°) On considère la suite (X_n) de matrices à deux lignes et une colonne définie par son premier terme $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $X_{n+1}=AX_n$ pour tout entier naturel n.

On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

Exprimer x_n et y_n en fonction de n et de α.

II. (6 points : 1°) 2 ; 2°) 1 + 1 ; 3°) 1 ; 4°) 1)

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population. Un individu sain est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie. Un individu malade est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri. Un individu guéri est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri. Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade. Les premières observations montrent que, d'un jour au jour suivant :

• 5 % des individus tombent malades ;

• 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0=1$, $b_0=0$ et $c_0=0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$.

1°) Donner sans explication la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=AU_n$.

2°) On admet que pour tout entier naturel n, on a $A^n=\begin{pmatrix}0,95^n & 0 & 0\\ \frac{1}{3}\left(0,95^n-0,8^n\right) & 0,8^n & 0\\ \frac{1}{3}\left(3-4\times 0,95^n+0,8^n\right) & 1-0,8^n & 1\end{pmatrix}$.

Exprimer en fonction de n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience puis déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3°) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.
Déterminer à l'aide de la calculatrice le pic épidémique, c'est-à-dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

Faire une seule phrase réponse sans expliquer.

4°) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de jours la proportion d'individus malades devient strictement inférieure à 0,1.

III. (2 points)

On pose $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

On considère la suite (U_n) de matrices à deux lignes et une colonne définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $U_0=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $U_{n+1}=AU_n+B$ pour tout entier naturel n.

À l'aide de la calculatrice, donner sans justifier les matrices U_5 et U_{10}.

Corrigé de l'enseignement obligatoire

I.

Question	1°	2°	3°	4°	**Total**
Réponse	b	b	d	c	

1°)

Tout d'abord, on observe que $-1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On obtient alors les égalités successives :

$$\arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}=\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\arg\overline{z}\qquad(2\pi)$$
$$\arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}=\frac{2\pi}{3}+\arg z\qquad(2\pi)$$
$$\arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}=\frac{2\pi}{3}+\theta\quad(2\pi)$$

2°)

On note E l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que $(1+i)z$ soit un réel positif ou nul.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Soit M un point quelconque du plan d'affixe z.

$$M\in E\Leftrightarrow(1+i)z\in\mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1+i)z=0\\ \text{ou}\\ (1+i)z\neq 0 \text{ et } \arg\left[(1+i)z\right]=0\quad[2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ \text{ou}\\ z\neq 0 \text{ et } \arg\left[(1+i)z\right]=0\quad[2\pi]\end{cases}$$

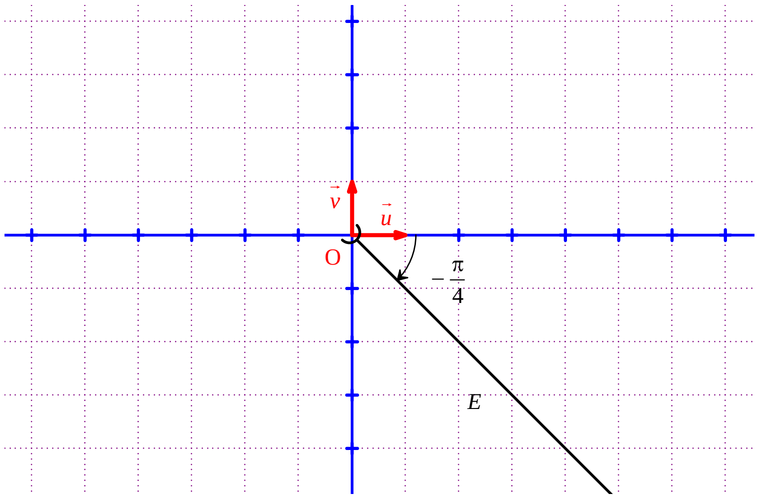
$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ \text{ou}\\ z\neq 0 \text{ et } \arg(1+i)+\arg z=0\quad[2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ \text{ou}\\ z\neq 0 \text{ et } \frac{\pi}{4}+\arg z=0\quad[2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ \text{ou}\\ z\neq 0 \text{ et } \arg z=-\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}M=O\\ \text{ou}\\ M\neq O \text{ et } \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=-\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]\end{cases}$$

E est donc la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$.



2^{e} méthode :

Soit M un point quelconque du plan d'affixe z.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})z &= (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)\\ &= (x-y)+\mathrm{i}(x+y)\end{aligned}$$

$$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z\in\mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geqslant 0\\ x+y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geqslant 0\\ y=-x\end{cases}$$

E est donc la demi-droite fermée d'origine O dont le sens et la direction sont donnés par le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$.

3°)

$1^{\text{ère}}$ méthode :

$$\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = 2014\arg(1+\mathrm{i}) \quad (2\pi)$$
$$\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = 2014\times\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$
$$\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = \frac{1007\pi}{2} \quad (2\pi)$$
$$\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = \frac{1008\pi}{2}-\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$
$$\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = 504\pi-\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Donc on en déduit que $\arg\left[(1+\mathrm{i})^{2014}\right] = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

2^{e} méthode :

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{2014} &= \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^{1007}\\ &= (1+2\mathrm{i}-1)^{1007}\\ &= (2\mathrm{i})^{1007}\\ &= 2^{1007}\times\mathrm{i}^{1007}\\ &= 2^{1007}\times\mathrm{i}^{1006}\times\mathrm{i}\\ &= 2^{1007}\times\left(\mathrm{i}^2\right)^{503}\times\mathrm{i}\\ &= 2^{1007}\times(-1)^{503}\times\mathrm{i}\\ &= -2^{1007}\mathrm{i}\end{aligned}$$

4°)

On a : $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left[\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right]=0 \quad (\pi)\\ &\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3}=k\pi \quad (k\in\mathbb{N})\\ &\Leftrightarrow n=3k \quad (k\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

II.

Soit *f* une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où *a* et *b* désignent deux réels.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Variations de *f*			b		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de *f* et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

1°) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'.
Justifier la réponse.

> Cette question nécessite une rédaction propre (cf. document « Comment rédiger avec des fonctions ») qui est un exercice de fin de Terminale.

• Comme *f* est croissante sur $\left]-\infty\,;a\right]$, on en déduit que $\forall x \in \left]-\infty\,;a\right] \quad f'(x) \geqslant 0$.

• Comme *f* est décroissante sur $\left[a\,;+\infty\right[$, on en déduit que $\forall x \in \left[a\,;+\infty\right[\quad f'(x) \leqslant 0$.

Donc la courbe représentative de f' est $\mathcal{C}_2$ et la courbe représentative de F est $\mathcal{C}_1$.

On peut aussi répondre en reprenant le tableau de variations de *f* et en rajoutant une ligne avec le signe de $f'(x)$.

2°) À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,

• encadrer *a* par deux entiers consécutifs (sans justifier) ;

Pour encadrer *a* par deux entiers consécutifs, on utilise la dérivée de *f* dont la représentation graphique est $\mathcal{C}_2$.

En effet, *f* admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ égal à *b* atteint pour $x = a$.
Or si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert atteint un extremum local en un réel alors la dérivée en ce réel s'annule.

Donc $f'(a) = 0$.

$1 \leqslant a \leqslant 2$

• le signe de *b* (en justifiant brièvement).

Pour déterminer le signe de *b*, on utilise la primitive F de *f* dont la représentation graphique est $\mathcal{C}_1$.

On sait que $f(a) = b$. Or comme F est une primitive de *f*, on peut aussi écrire : $\text{F}'(a) = b$.

D'après le graphique, F est croissante sur $[1\,;2]$.

Or si une fonction est croissante sur un intervalle, alors sa dérivée est positive ou nulle sur cet intervalle

Donc, comme $a \in [1\,;2]$, $\text{F}'(a) \geqslant 0$ soit $b \geqslant 0$.

On peut préciser davantage.

Si *b* était égal à 0, alors pour tout réel *x* on aurait $f(x) \leqslant 0$ soit $\text{F}'(x) \leqslant 0$.
F serait donc décroissante sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas.

On peut donc affirmer que $b > 0$.

3°) Quelle propriété permet d'affirmer que la fonction f s'annule exactement en deux réels x_1 et x_2 ?
Déterminer à l'aide du graphique un encadrement de x_1 et x_2 par deux entiers consécutifs.

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ (selon la démarche qui est détaillée ci-après).

Comme *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, on en déduit que *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

• Sur $\left]-\infty\,;a\right]$, *f* est continue et strictement croissante.

De plus, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(a) = b$.

Or $0 \in \left]-\infty\,;b\right]$ donc $b \geqslant 0$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme générale, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_1 dans l'intervalle $\left]-\infty\,;a\right]$.

• Sur $\left[a\,;+\infty\right[$, *f* est continue et strictement décroissante.

De plus, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $f(a) = b$.

Or $0 \in \left]-\infty\,;b\right]$ donc $b \geqslant 0$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme générale, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_2 dans l'intervalle $\left[a\,;+\infty\right[$.

Pour déterminer un encadrement de x_1 et de x_2, on utilise la courbe $\mathcal{C}_1$.

En effet, l'équation $f(x)=0$ est équivalente à $\mathrm{F}'(x)=0$.
On regarde les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_1$ en lesquels la tangente est horizontale.

Par lecture graphique, on obtient : $-3 < x_1 < -2$ et $3 < x_2 < 4$.

Avec le graphique, on pourrait donner des valeurs approchées de x_1 et de x_2 mais il n'est pas possible d'en donner des valeurs exactes.

III.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$$

1°) Calculer la valeur exacte de u_1 (on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$).

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1 \times \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$.

On en déduit que *f* est une primitive de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 x\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x \\ &= \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_0^1 \\ &= (1-1)\mathrm{e}^1 - (0-1)\mathrm{e}^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Autre méthode : On utilise la formule d'intégration par parties.

Autre manière de présenter le calcul

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 x\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x \\ &= \left[f(x)\right]_0^1 \\ &= f(1) - f(0) \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et démontrer que (u_n) converge.

On utilise la méthode par différence (la méthode par quotient ne convient pas).

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x && \text{(il faut penser à quantifier)} \\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1} - x^n\right)\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \left(x^n \times x\mathrm{e}^x - x^n\mathrm{e}^x\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\mathrm{e}^x (x-1) \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On étudie le signe de l'expression qui est « dans » l'intégrale pour $x \in [0\,;1]$. Pour cela, on fait une étude directe (inutile de faire un tableau de signes).

Or $\forall x \in [0\,;1] \quad x^n\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$

D'où $\forall x \in [0\,;1] \quad x^n\mathrm{e}^x(x-1) \leqslant 0$.

Les bornes de l'intégrale étant dans le bon sens, $\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x(x-1) \ \mathrm{d}x \leqslant 0$ (propriété sur le signe d'une intégrale).

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

On travaille avec des inégalités larges car dans le cours, les propriétés d'ordre pour les intégrales sont données avec des inégalités larges.

On fixe un entier naturel *n*.

$\forall x \in [0\,;1] \quad x^n\mathrm{e}^x \geqslant 0$

Donc $\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$

La suite (u_n) est donc décroissante minorée par 0.

Or toute suite décroissante minorée est convergente.
Donc la suite (u_n) est convergente.

3°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Il n'est pas possible de trouver la limite de la suite (u_n) directement.
On va démontrer que la limite de la suite est 0.
Attention,

- aucune propriété du cours ne permet de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 ;
- la calculatrice ne permet d'affirmer que la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

On ne peut déduire la limite de u_n directement. Il n'y a aucune propriété dans le cours qui permette de répondre. La calculatrice ne permet pas de conclure. On est obligé de faire toute une démarche.

On fixe un entier naturel n.

$\forall x \in [0\,;1] \quad 1 \leqslant e^x \leqslant e$

$\forall x \in [0\,;1] \quad x^n \leqslant x^n e^x \leqslant e x^n$

Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\int_0^1 x^n \, dx \leqslant \int_0^1 x^n e^x \, dx \leqslant \int_0^1 e x^n \, dx$.

Donc $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant \int_0^1 x^n e^x \, dx \leqslant e\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Par suite, on a : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 x^n e^x \, dx \leqslant e \times \dfrac{1}{n+1}$ ce qui donne finalement $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$.

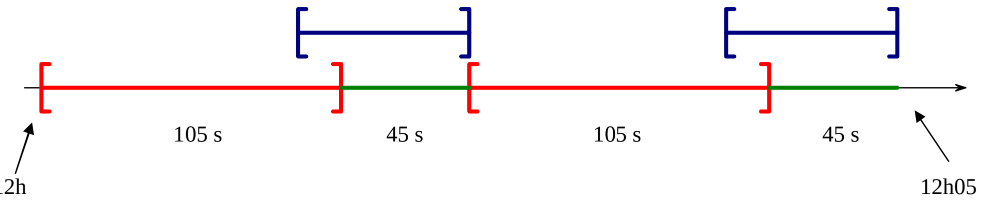
Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0{,}1$ est 26.

IV.

À un feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance. À 12 heures, le feu se met au rouge et un piéton se présente à un instant au hasard entre 12 heures et 12 heures 05 pour traverser. La variable aléatoire T qui donne le temps écoulé, en secondes, entre 12 heures et l'heure d'arrivée du piéton suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;300]$.
On donnera directement les résultats sous forme décimale sur la feuille de réponses sans faire de phrases.
Calculer la probabilité que le piéton :
a) trouve le feu vert et passe sans attendre ;
b) n'attende pas le feu vert plus de 15 secondes ;
c) attende le feu vert plus de 30 secondes.

a) 0,3 b) 0,4 c) 0,5

De 12 h à 12 h 05, il y a une durée de 5 minutes soit 300 secondes.



a) On cherche $P\big((105 \leqslant T \leqslant 150) \cup (255 \leqslant T \leqslant 300)\big)$.

$P\big((105 \leqslant T \leqslant 150) \cup (255 \leqslant T \leqslant 300)\big) = P(105 \leqslant T \leqslant 150) + P(255 \leqslant T \leqslant 300)$ (car les deux intervalles sont disjoints)

$$= \frac{150-105}{300} + \frac{300-255}{300}$$

$$= \frac{90}{300}$$

$$= 0{,}3$$

2°) On cherche $P\big((90 \leqslant T \leqslant 150) \cup (240 \leqslant T \leqslant 300)\big)$.

$P\big((90 \leqslant T \leqslant 150) \cup (240 \leqslant T \leqslant 300)\big) = P(90 \leqslant T \leqslant 150) + P(240 \leqslant T \leqslant 300)$ (car les deux intervalles sont disjoints)

$$= \frac{150-90}{300} + \frac{300-240}{300}$$

$$= \frac{120}{300}$$

$$= 0{,}4$$

3°) On cherche $P\left((0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 75) \cup (150 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 225)\right)$.

$P\left((0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 75) \cup (150 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 225)\right) = P(0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 75) + P(150 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 225)$ (car les deux intervalles sont disjoints)

$$= \frac{75}{300} + \frac{75}{300}$$

$$= \frac{150}{300}$$

$$= 0{,}5$$

V.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants : $D \begin{cases} x = -3-2t \\ y = 4+t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad ; \quad D' \begin{cases} x = -2+t' \\ y = -4+2t' \\ z = -8+2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

ainsi que le plan P d'équation $z = -4$.
On considère également les points $\mathrm{A}(-2\,;3\,;-4)$ et $\mathrm{B}(4\,;1\,;0)$.

Pour chaque affirmation, dire sans justifier si elle est vraie ou fausse (compléter le tableau donné sur la feuille de réponse par V ou F).
Chaque réponse juste rapporte 1 point ; chaque réponse fausse ou absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée.

1°) Les droites D et (AB) sont sécantes.

2°) Les droites D, D' et (AB) sont concourantes.

3°) Les droites D, D' et (AB) sont coplanaires.

4°) Les plans (OAB) et P sont sécants.

Question	1°	2°	3°	4°	**Total**
Réponse	V	V	F	V	

1°) Déterminons si les droites D et (AB) sont sécantes.

Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \begin{vmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Un système d'équations paramétriques de (AB) est donc $\begin{cases} x = 6t'-2 \\ y = -2t'+3 \\ z = 4t'-4 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$.

On cherche s'il existe deux réels t et t' tels que $\begin{cases} -3-2t = 6t'-2 & (1) \\ 4+t = -2t'+3 & (2) \\ t = 4t'-4 & (3) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues.
On commence par résoudre le système formé par les équations (2) et (3).

$\begin{cases}(2)\\(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4+t=-2t'+3\\t=4t'-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t+2t'=-1\\t-4t'=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6t'=3\\t-4t'=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'=\dfrac{1}{2}\\t-4\times\dfrac{1}{2}=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'=\dfrac{1}{2}\\t-4\times\dfrac{1}{2}=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'=\dfrac{1}{2}\\t-2=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'=\dfrac{1}{2}\\t-2=-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t'=\dfrac{1}{2}\\t=-2\end{cases}$

L'équation (1) est vérifiée pour les valeurs de t et t' ainsi trouvées.

Donc les droites D et (AB) sont sécantes au point $\mathrm{I}(1\,;2\,;-2)$.

Les coordonnées de I se calculent grâce à l'un des deux systèmes d'équations paramétriques

(par exemple, avec celui de D : $\begin{cases}x_{\mathrm{I}}=-3-2\times(-2)=1\\y_{\mathrm{I}}=4-2=2\\z_{\mathrm{I}}=-2\end{cases}$).

2°) Déterminons si D, D' et (AB) sont concourantes.

On sait que D et (AB) sont sécantes en $\mathrm{I}(1\,;2\,;-2)$.

Pour savoir si I appartient ou non à D', on cherche s'il existe un réel t' tel que $\begin{cases}1=-2+t'\\2=-4+2t'\\-2=-8+2t'\end{cases}$.

Ce système équivaut à : $\begin{cases}t'=3\\t'=3\\t'=3\end{cases}$ soit $t'=3$.

On en déduit que les droites D, D' et (AB) sont concourantes en $\mathrm{I}(1\,;2\,;-2)$.

3°) Déterminons si D, D' et (AB) sont coplanaires.

On sait que les droites D, D' et (AB) sont concourantes en $\mathrm{I}(1\,;2\,;-2)$.

De plus, on sait que :

le vecteur $\vec{u}(6\,;-2\,;4)$ est un vecteur directeur de D ;

le vecteur $\vec{v}(1\,;2\,;2)$ est un vecteur directeur de D'.

On va donc déterminer si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont coplanaires.

On cherche s'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda x_{\vec{u}}+\mu x_{\vec{v}}\\y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda y_{\vec{u}}+\mu y_{\vec{v}}\\z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda z_{\vec{u}}+\mu z_{\vec{v}}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda\times(-2)+\mu\times1\\y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda\times1+\mu\times2\\z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\lambda\times1+\mu\times2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6=-2\lambda+\mu\\-2=\lambda+2\mu\\4=\lambda+2\mu\end{cases}$

Le système $\begin{cases}-2=\lambda+2\mu\\4=\lambda+2\mu\end{cases}$ n'admet pas de solution (les deux seconds membres sont égaux alors que les premiers membres sont différents).

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ne sont donc pas coplanaires et par conséquent, les droites D, D' et (AB) ne sont pas coplanaires.

4°) Déterminons si les plans (OAB) et P sont sécants.

1^ère^ méthode :

Le plan P est parallèle au plan $\left(x\text{O}y\right)$ (car il a pour équation $z=4$).

Les points O et $\text{B}\left(4\,;1\,;0\right)$ appartiennent au plan $\left(x\text{O}y\right)$.

Donc l'intersection des plans $\left(x\text{O}y\right)$ et (OAB) est la droite (OB).

Or si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.

Donc les plans (OAB) et P sont sécants.

2^e^ méthode :

Le plan $\left(\text{OAB}\right)$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-2+6t-2t' \\ y=3-2t+3t' \\ z=-4+4t-4t' \end{cases}$ $\left(t\,;t'\right)\in\mathbb{R}^2$.

Pour déterminer l'intersection de $\left(\text{OAB}\right)$ avec P, on résout le système $\begin{cases} x=-2+6t-2t' \\ y=3-2t+3t' \\ z=-4+4t-4t' \\ z=-4 \end{cases}$.

Ce système est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} x=-2+6t-2t' \\ y=3-2t+3t' \\ -4=-4+4t-4t' \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2+6t-2t' \\ y=3-2t+3t' \\ 0=0+4t-4t' \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2+6t-2t' \\ y=3-2t+3t' \\ t=t' \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2+6t-2t \\ y=3-2t+3t \\ t=t' \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3+t \\ z=-4 \end{cases}$$

L'intersection de (AOB) et P est donc la droite admettant pour système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=3+t \\ z=-4 \end{cases} \quad \left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Corrigé de l'enseignement de spécialité

I.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ où α est un réel fixé.

1°) Calculer A^2.

$$\begin{aligned}A^2&=A\times A\\&=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0\times 0+\alpha\times 1 & 0\times\alpha+\alpha\times 0\\ 1\times 0+0\times 1 & 1\times\alpha+0\times 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut écrire : $A^2=\alpha I_2$.

2°) Soit p un entier naturel quelconque.
Déterminer la matrice A^{2p} ; en déduire la matrice A^{2p+1}.

Dans cette question, on ne fait pas de récurrence.

$$A^{2p}=\left(A^2\right)^p$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}^p$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha^p & 0\\ 0 & \alpha^p\end{pmatrix}$$ (on applique la propriété sur la puissance d'une matrice diagonale)

$$A^{2p+1}=A^{2p}\times A$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha^p & 0\\ 0 & \alpha^p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \alpha^{p+1}\\ \alpha^p & 0\end{pmatrix}$$

3°) On considère la suite $\left(X_n\right)$ de matrices à deux lignes et une colonne définie par son premier terme $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $X_{n+1}=AX_n$ pour tout entier naturel *n*.

On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

Exprimer x_n et y_n en fonction de *n* et de α.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad X_{n+1}=AX_n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad X_n=A^nX_0$

1[er] cas : *n* est pair

On suppose que $n=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$

On a alors :

$$\begin{aligned}X_{2p}&=\begin{pmatrix}\alpha^p & 0\\ 0 & \alpha^p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha^p\\ \alpha^p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $x_{2p}=y_{2p}=\alpha^p$.

2[e] cas : *n* est impair

On suppose que $n=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}X_{2p+1}&=\begin{pmatrix}0 & \alpha^{p+1}\\ \alpha^p & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha^{p+1}\\ \alpha^p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $x_{2p+1}=\alpha^{p+1}$ et $y_{2p}=\alpha^p$.

II.

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population. Un individu sain est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie. Un individu malade est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri. Un individu guéri est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri. Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade. Les premières observations montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel *n*, on note a_n la proportion d'individus sains *n* jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades *n* jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris *n* jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1°) Donner sans explication la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

Commentaires ;

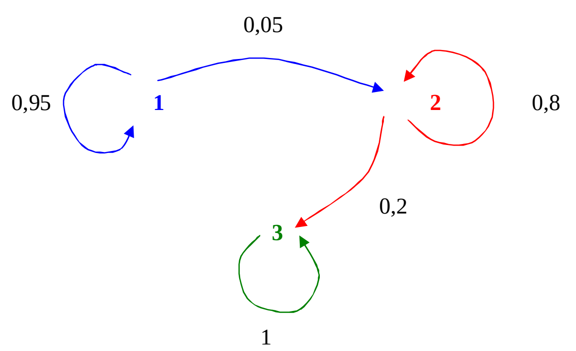
On peut représenter le graphe probabiliste associé à la situation.

A est la matrice de transition en colonnes du graphe.

État 1 : individu sain

État 2 : individu malade

État 3 : individu guéri



On écrit les coefficients de pondération sous forme décimale (pas de pourcentages).

On peut aisément retrouver le résultat demandé grâce à la formule donnée dans la question suivante (en faisant $n = 1$).

2°) On admet que pour tout entier naturel *n*, on a $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4\times 0,95^n + 0,8^n\right) & 1-0,8^n & 1 \end{pmatrix}$.

Exprimer en fonction de *n* la proportion d'individus malades *n* jours après le début de l'expérience puis déterminer sa limite lorsque *n* tend vers + ∞.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4\times 0,95^n + 0,8^n\right) & 1-0,8^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,95^n \\ \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4\times 0,95^n + 0,8^n\right) \end{pmatrix}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right)$.

Donc la proportion d'individus malades *n* jours après le début de l'expérience est donné par $b_n = \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right)$.

$-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$

$-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

Donc par limite d'une différence, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0,95^n - 0,8^n\right) = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

3°) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.
Déterminer à l'aide de la calculatrice le pic épidémique, c'est-à-dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.
Faire une seule phrase réponse sans expliquer.

D'après la calculatrice, le pic épidémique est atteint 9 jours après le début de l'expérience.

$b_8 = 0{,}1652...$

$b_9 = 0{,}1653...$

$b_{10} = 0{,}1638...$

4°) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de jours la proportion d'individus malades devient strictement inférieure à 0,1.

D'après la calculatrice, la proportion d'individus malades devient strictement inférieure à 0,1 au bout de 24 jours.

$b_{24} = 0{,}9576...$

III.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (U_n) de matrices à 2 lignes et 1 colonne définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$ pour tout entier naturel *n*.

À l'aide de la calculatrice, donner sans justifier les matrices U_5 et U_{10}.

$\mathrm{U}_5 = \begin{pmatrix} -43 \\ -116 \end{pmatrix}$

$\mathrm{U}_{10} = \begin{pmatrix} 11942 \\ 304 \end{pmatrix}$

On peut utiliser la touche permettant d'obtenir Rep/Ans sur la calculatrice (sans faire de programme).
On peut aussi utiliser un petit programme.