Exercices sur les variables aléatoires discrètes

1 Un QCM est constitué de cinq questions indépendantes avec pour chaque question 4 réponses possibles. Il y a une réponse exacte et une seule par question.
1°) Un candidat répond au hasard. Chaque bonne réponse lui rapporte 1 point et chaque mauvaise ou absence de réponse lui fait perdre x (x compris entre 0 et 1). On appelle Z le nombre de bonnes réponses et X le total des points qui peut être négatif.
a) Quelle est la loi de Z ? Préciser les caractéristiques de cette loi.
b) Donner une relation liant Z et X. En déduire $E(\mathrm{X})$ en fonction de x.
c) Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(\mathrm{X}) \geqslant 0$?
2°) Le candidat répond encore au hasard à toutes les questions mais lorsque le total de ses points est négatif, son nombre de points est ramené à 0. Soit Y le score final du candidat.
Déterminer la loi de Y et $E(\mathrm{Y})$.

2 Une urne contient 6 boules rouges et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer successivement sans remise deux boules de l'urne. Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne un euro ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd un euro.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique en euros.
1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
2°) En déduire pour quelle valeur de n le jeu est équitable.

3 On considère un QCM comportant 20 questions avec k réponses possibles par questions $\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$; il y a une seule réponse possible par question.
Après une première série de réponses, on attribue un point par réponse juste au candidat et on lui offre la possibilité de répondre une deuxième fois pour corriger ses erreurs, en lui attribuant $\frac{1}{2}$ point par réponse juste cette fois. Durant les deux phases de l'expérience, le candidat répond au hasard aux questions.

Déterminer k tel que la moyenne de ce type de candidat soit de 5 sur 30.

Indications :

On note X_1 le nombre de réponses justes après la première série et X_2 le nombre de réponses justes au deuxième passage.

On note X la note au test.

Justifier que $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{X}_2$ et déterminer k tel que $E(\mathrm{X}) = 5$.

4 On place dans une urne six boules numérotées de 0 à 5, indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer simultanément trois boules.
1°) Quel est le nombre de tirages possibles ?
2°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les trois boules tirées.
a) Déterminer la1oi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
b) Calculer la probabilité pour que X prenne une valeur strictement supérieure à 3.

5 1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\sum_{p=1}^{n} p(p-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \text{ et } \sum_{p=1}^{n} p^2(p-1) = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}.$$
2°) Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n (n entier naturel tel que $n \geqslant 2$).
On extrait simultanément deux jetons du sac. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le plus grand des deux nombres inscrits sur les deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
c) Calculer la variance de X.

6 Une urne contient n boules (n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$) : deux sont blanches, les autres sont noires.
Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages sont tels que chaque boule a la même probabilité d'être tirée.
On vide l'urne en tirant les n boules, une à une sans les remettre.
On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.
1°) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2°) Calculer la loi de probabilité de X.
3°) Calculer l'espérance mathématique de X.

On rappelle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

7 Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant, qui se présente comme une succession de parties :
Au départ, A et B misent chacun 1 € et lancent chacun une pièce parfaitement équilibrée.
Si A amène « pile » et B amène « face », le jeu s'arrête, A gagne et récupère la totalité de l'argent ;
Si B amène « pile » et A amène « face », le jeu s'arrête, B gagne et récupère la totalité de l'argent.
Dans les autres cas, la partie est nulle, les joueurs doublent la mise et engagent une nouvelle partie.
Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant ou que la N-ième partie s'achève sur un nul (auquel cas les joueurs récupèrent leurs mises respectives).
Pour tout entier naturel n compris entre 1 et N, on considère les événements :
A_n : « le jeu se termine à la n-ième partie par le gain de A » ;
B_n : « le jeu se termine à la n-ième partie par le gain de B » ;
C_n : « la n-ième partie est nulle ».
On note x_n, y_n et z_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.
1°) Calculer x_1, y_1 et z_1.
2°) Pour tout entier naturel n compris entre 1 et N, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n.
3°) On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'euros mis en jeu lors de la partie qui conclut le jeu (c'est-à-dire récupérés par le gagnant ou partagés entre les deux joueurs dans le cas où le jeu s'achève sur un nul). Si le jeu s'achève à la k-ième partie, on a ainsi : $\mathrm{X} = 2^k$.
a) Donner l'expression de la plus grande valeur que peut prendre X.
b) Calculer $P\left(\mathrm{X} = 2^{\mathrm{N}}\right)$ (on pourra remarquer que la $(\mathrm{N}-1)$-ième partie s'est achevée sur un nul).
c) Pour k entier naturel compris entre 1 et $\mathrm{N}-1$, exprimer l'événement $\left(\mathrm{X} = 2^k\right)$ à l'aide des événements A_k et B_k. En déduire $P\left(\mathrm{X} = 2^k\right)$.
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

8 Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants :
A : « on obtient des boules des deux couleurs » et B : « on obtient au plus une boule blanche ».
1°) Calculer la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.
2°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.
En déduire pour quelle valeur de n les événements A et B sont indépendants.

9

Partie A

On s'intéresse à la production d'un arbre fruitier donné.
On sait que lors de l'année 2000, l'arbre a donné une bonne récolte.

- Si lors d'une année, l'arbre donne une bonne récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et il en donne une mauvaise avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si par contre lors d'une année, l'arbre donne une mauvaise récolte, l'année suivante, il donne une bonne récolte avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et une mauvaise récolte avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On note p_n la probabilité de l'événement « l'arbre donne une bonne récolte durant l'année $2000+n$ ».
1°) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2°) Donner l'expression de p_n en fonction de n.

Partie B

L'exploitant agricole réalise en vendant la récolte de l'arbre fruitier considéré dans la partie A, un bénéfice qui est de :

- 200 € si la récolte est bonne ;
- 10 € si la récolte est mauvaise.

Pour tout entier naturel n, on note G_n la variable aléatoire représentant le gain en euros de l'agriculteur pour cet arbre lors de l'année $2000+n$.
1°) Déterminer la loi de probabilité de G_n et calculer son espérance en fonction de n.
2°) Quelle est la somme totale S des gains que peut espérer l'agriculteur, pour les dix premières années de récolte sur cet arbre, de 2000 à 2009 ?
Donner la valeur exacte de S puis donner une valeur approchée à un euro près.

10 Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point $M(x\,;y)$.
On désigne par D le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1°) Placer dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points correspondants aux différents résultats possibles.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « le point M est sur l'axe des abscisses » ; B : « le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1. »
3°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
c) Calculer la probabilité de l'événement C : « le point M appartient au disque D ».
4°) On tire cinq fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise.
On obtient ainsi cinq points du plan.
Quelle est la probabilité de l'événement F : « au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5°) On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise.
On obtient ainsi n points du plan.
Déterminer le plus petit entier naturel n strictement positif tel que la probabilité de l'événement : « au moins l'un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,9999.

11 Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
1°) Calculer la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise soit défectueux.
2°) Un petit commerçant passe une commande d'articles à l'entreprise.
Il veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %.
Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

12 Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. On effectue ainsi k tirages successifs.
Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grandes que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

13 Un fumeur se trouvant en plein air possède n allumettes $(n \geqslant 2)$ et veut allumer une cigarette.
Chaque allumette a une probabilité p (avec $0 < p < 1$) que le vent l'éteigne avant que la cigarette soit allumée.
1°) Quelle est la probabilité pour que le fumeur allume sa cigarette ?
2°) Sachant que le fumeur réussit à allumer sa cigarette, quelle est la probabilité que ce soit avec la k-ième allumette $(k \in [\![1\,;n]\!])$.
Pour quelle valeur de k cette probabilité est-elle maximale ?
3°) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes utilisées.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X. Vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$.
c) Démontrer que l'espérance de X est donnée par la formule $E(X) = \frac{1-p^n}{1-p}$.

14 Un sportif a droit à n essais pour se qualifier dans un tournoi. À chaque essai, la probabilité de le réussir vaut p (avec $0 < p < 1$) et si le sportif réussit à se qualifier, il arrête aussitôt les essais.
On note X le nombre aléatoire d'essais effectués.
1°) Quelle est la probabilité que ce sportif se qualifie ?
2°) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
3°) Sachant que ce sportif se qualifie, quelle est la probabilité que cet événement se soit produit au n-ième essai ?

15 Dans un stand de tir, un joueur dispose de n fléchettes (n entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2) pour tenter de faire éclater un ballon.
À chaque essai, la probabilité de succès vaut p, avec $0 < p < 1$, et donc la probabilité d'un échec vaut $q = 1 - p$.
On suppose que les différentes essais sont indépendantes que les autres et que le joueur s'arrête dès que le ballon éclate (s'il éclate !).
1°) Soit X le nombre aléatoire de fléchettes utilisées par le joueur.
a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?
b) Calculer $P(\mathrm{X}=1)$, $P(\mathrm{X}=n)$ puis $P(\mathrm{X}=k)$ pour $k \in [\![2\,;n-1]\!]$.
Vérifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\mathrm{X}=k) = 1$.
c) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}$; on pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k$.
Démontrer que l'espérance de X est donnée par la formule $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2°) Sachant que le ballon a éclaté, quelle est la probabilité que ce soit avec la n-ième fléchette ?

16 Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0, et une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1.
On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence l'opération n fois. Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des jetons de la boîte A à l'issue du n-ième échange.
1°) Déterminer la loi de X_n et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ pour $n \in \{1,2,3\}$.
2°) Calculer les probabilités conditionnelles $P(\mathrm{X}_{n+1} = k / \mathrm{X}_n = j)$ pour $(j,k) \in \{0\,;1\,;2\}^2$.
Dans la suite, on pose $p_n = P(\mathrm{X}_n = 0)$, $q_n = P(\mathrm{X}_n = 1)$ et $r_n = P(\mathrm{X}_n = 2)$.
3°) Exprimer p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n.
4°) Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de q_n en fonction de n.
5°) Déterminer la loi de X_n.
6°) Calculer les limites des suites p, q, r et $\left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\right)$. Interpréter les résultats.

17 Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise.
S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de points obtenus.
1°) Déterminer la loi de X, puis $E(\mathrm{X})$ et $V(\mathrm{X})$.
2°) Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y, puis $E(\mathrm{Y})$ et $V(\mathrm{Y})$.
3°) Refaire l'exercice si l'on suppose que le jeu est sans remise.

18 Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois un dé non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note chaque fois le numéro de la face supérieure. On note X le nombre de fois où le numéro obtenu est pair.
Quelle est la probabilité pour que X soit un nombre impair ?

19 On considère N urnes qui contiennent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un jeton dans chaque urne.
On appelle X le plus grand des numéros obtenus.
1°) Déterminer l'image par la fonction de répartition F de la variable aléatoire X de tout élément de $[\![1\,;n]\!]$.
2°) Tracer la représentation graphique de F lorsque $N = 3$ et $n = 6$.
3°) Donner la loi de probabilité de X dans le cas général.

20 On dispose d'un dé équilibré et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p $\left(p \in \left]0\,;1\right[\right)$. Soit N un entier naturel non nul. On effectue N lancers du dé. Soit n le nombre de fois où l'on obtient le numéro 6. On lance alors n fois la pièce. Soit Z le nombre de 6 obtenus lors des lancers du dé, X le nombre de « pile » obtenu lors des lancers de la pièce et Y le nombre de « face ».
1°) Préciser la loi de Z, $E(\mathrm{Z})$ et $V(\mathrm{Z})$.
2°) Déterminer $P(\mathrm{X}=k / \mathrm{Z}=n)$ pour k et n entiers naturels. On distinguera deux cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.
3°) Démontrer que si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, alors $P\left((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\right) = \dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ et si $k > n$, alors $P\left((\mathrm{X}=k) \cap (\mathrm{Z}=n)\right) = 0$.
4°) Calculer $P(\mathrm{X}=0)$.
5°) Démontrer que, si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, alors $\dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} = \dbinom{N}{k}\dbinom{N-k}{n-k}$.
En déduire $P(\mathrm{X}=k)$.
6°) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

21 Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 0, 1, 2 et telle que $P(\mathrm{X}=0) = P(\mathrm{X}=2) = a$ où a est un réel.
1°) Pour quelles valeurs de a définit-on ainsi une loi de probabilité ?
2°) On suppose que la condition précédente est vérifiée.
On considère alors la variable aléatoire Y définie par $\mathrm{Y} = 2\mathrm{X} - 1$.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Calculer $E(\mathrm{X})$, $V(\mathrm{X})$, $\sigma(\mathrm{X})$ puis $E(\mathrm{Y})$, $V(\mathrm{Y})$ et $\sigma(\mathrm{Y})$.

22 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1\,;0\,;1\}$.
On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{XY}$.
Déterminer la loi de Y et Z.
Calculer la covariance de X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?

23 Une urne contient une boule blanche et une boule noire.
On effectue des prélèvements d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule obtenue est remise dans l'urne. On ajoute de plus n boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée avant le tirage suivant.
1°) Dans cette question, $n = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches obtenues au cours des k premiers tirages ?
Préciser son espérance et sa variance.
2°) Dans cette question, $n = 1$. Quelle est la loi de probabilité du nombre de boules blanches obtenues au cours des deux premiers tirages ? des trois premiers tirages ? Peut-on généraliser les résultats obtenus ?
3°) Dans cette question, n est choisi au début de l'expérience, au hasard parmi les trois nombres 0, 1, 2.
On effectue alors deux tirages et on obtient les deux fois une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir choisi $n = 0$? $n = 1$? $n = 2$?

24 Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois une pièce de monnaie donnant pile avec la probabilité $p\ (0<p<1)$ et face avec la probabilité $q=1-p$. On appelle k-chaîne de pile une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné pile, cette suite devant être suivie d'un face ou être la dernière suite du lancer de la pièce n fois. On appelle Y_k le nombre total de k-chaînes de pile obtenues au cours des n lancers, pour $k\in[\![1, n]\!]$.

Exemple : si $n=11$, pour le lancer suivant : PPFFPPPFPFP (P représentant pile et F représentant face), on a : $Y_1=2$, $Y_2=1$, $Y_3=1$ et $Y_k=0$ pour $k\in[\![4, 11]\!]$.

1°) Déterminer la loi de Y_n et calculer $E(Y_n)$.

2°) Démontrer que $P(Y_{n-1}=1)=2pq^{n-1}$ et calculer $E(Y_{n-1})$.

3°) On note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de pile commencée au i-ième lancer, qui vaut 0 sinon, pour $i\in[\![1, n]\!]$ et $k\in[\![1, n-2]\!]$.

a) Calculer $P(X_{1,k}=1)$.

b) Démontrer que $P(X_{i,k}=1)=q^2p^k$ pour $i\in[\![2, n-k]\!]$.

c) Démontrer que $P(X_{n-k+1,k}=1)=qp^k$.

d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.

25 Soit n un entier naturel non nul. Soit un réel p tel que $p\in\,]0\,;1[$.

Soit X et Y deux variables définies sur un même espace probabilisé telles que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et Y suit la loi binomiale de paramètre n et $q=1-p$.

Démontrer que pour tout $i\in\{0\,;...;n-1\}$, on a : $P(X\leqslant i)=1-P(Y\leqslant n-i-1)$.

26 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini.

Déterminer le minimum de la fonction $a\mapsto \mathrm{E}\left[(X-a)^2\right]$.

27 Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :
S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05.
S'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.
Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie ».

1°) On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer son espérance et sa variance.

2°) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

Exprimer p_n en fonction de n ; déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

28 On considère n amis A_1, A_2, …, A_n (n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 3). Chacun dispose d'une pièce équilibrée qu'il lance une fois, pour obtenir pile ou face. Si le résultat d'un joueur est différent de celui des autres, il reçoit 1 € de chacun d'entre eux. Dans tous les autres cas, la partie est nulle.
On note X le gain algébrique en euros de l'un quelconque des joueurs, par exemple A_1.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Déterminer leur limite lorsque n tend vers $+\infty$.

29 On dispose n boules dans une urne, numérotées de 1 à n $(n\geqslant 2)$.

Un premier joueur effectue des tirages sans remise (et au hasard chaque fois parmi les boules restants) jusqu'au premier tour X_1 où il tire la boule portant le numéro n.

1°) Démontrer que X_1 suit une loi uniforme ; préciser son espérance.

2°) Un second joueur entre alors en scène.
Dans le premier cas, ce joueur effectue X_2 tirages jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les boules restantes (on pose $X_2=0$ lorsqu'il ne reste plus de boules dans l'urne).

Quelle est la loi de X_2 ? Vérifier que $\sum\limits_{k\in X_2(\Omega)} P(X_2=k)=1$.

30 *La calculatrice est autorisée.*

On suppose qu'une action cotée à la bourse de Paris coûte 50 euros le 15 janvier 2011. Chaque jour, on considère que l'action a une probabilité $p=0,53$ d'augmenter de 3,5 % et une probabilité $1-p$ de baisser de 3,4 %. On suit l'action pendant une période de 100 jours.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de hausses de l'action pendant ces jours et S la variable aléatoire représentant le cours de l'action en euros à l'issue de la période de 100 jours.
1°) Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2°) Exprimer S en fonction de X.
3°) Calculer la probabilité que l'action coûte plus de 200 euros à l'issue de la période. On donnera la valeur arrondie au millième.
4°) Calculer l'espérance et la variance de S.

31 On choisit une permutation de $E=[\![1\,;n]\!]$ au hasard et on note X le nombre de ses points fixes. On note en outre F_i l'événement « La permutation choisie admet i pour point fixe » pour tout $i\in E$.

1°) Calculer $P(F_i)$ pour tout $i\in E$ et $P(F_i\cap F_j)$ pour tout $(i\,;\,j)\in E^2$ avec $i\neq j$.

2°) Exprimer X en fonction des événements F_1, … , F_n, puis en déduire l'espérance mathématique de X.

3°) a) Calculer $\mathrm{cov}\left(1_{F_i}\,;1_{F_j}\right)$ pour tout $(i\,;\,j)\in E^2$ avec $i\neq j$.

b) En déduire la variance de X.

32 **Inégalité d'Edith Kosmanek**

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).

1°) Démontrer que l'on a : $\left|P(A\cap B)-P(A)\times P(B)\right|\leqslant\sqrt{P(A)P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})}$.

Indication : calculer la covariance de deux variables aléatoires bien choisies.

2°) En déduire que l'on a : $\left|P(A\cap B)-P(A)\times P(B)\right|\leqslant\dfrac{1}{4}$ (inégalité d'Edith Kosmanek).

33 Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1). Un joueur tire successivement avec remise 10 boules de l'urne et examine leurs couleurs. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, mais pour chaque noire tirée, il perd 10 €. On note G_n le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Calculer $E(G_n)$ et $\sigma(G_n)$ en fonction de n sous forme simplifiée.

2°) Étudier le sens de variation des suites de terme général $E(G_n)$ et $\sigma(G_n)$ ainsi que leurs limites lorsque n tend vers $+\infty$.

34 On effectue p tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note $X_1, \dots,$ X_p les résultats des tirages successifs et on pose $Y = \max(X_1, \dots, X_p)$.

1°) Déterminer la fonction de répartition de Y.

2°) En déduire que $E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$.

3°) Déterminer un équivalent de $E(Y)$ quand n tend vers $+\infty$ pour p fixé.

35

On dit qu'une variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé (Ω, P) est une variable aléatoire de Rademacher pour exprimer qu'elle prend ses valeurs dans $\{-1;1\}$ et que $P(Z=-1) = P(Z=1) = \frac{1}{2}$.

On considère une famille $(R_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de variable aléatoires, définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P), de Rademacher, mutuellement indépendantes.
On considère la variable aléatoire X qui est égale au déterminant de la matrice carrée de terme général $(R_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

36 Une urne contient deux boules blanches et trois boules rouges. On tire les boules, l'une après l'autre et sans remise, jusqu'à obtenir une boule blanche. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche
Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer son espérance et sa variance

37 On considère un entier naturel $N \geqslant 3$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.
Par exemple, si $N = 6$ et si l'on obtient successivement les numéros 1, 5, 4, 7, 3, 5, la variable T_6 prend la valeur 6, et si l'on obtient successivement les numéros 5, 2, 2, 1, 6, 5, 3 la variable T_6 prend la valeur 3.
On note $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ l'espace probabilisé qui sert de modèle à cette expérience.

1°) Calculer $P(T_N = 2)$ et $P(T_N = N+1)$.

2°) Démontrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a $P(T_N > k) = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right)$.

En déduire pour tout $k \in \{2, 3, \dots, N+1\}$, $P(T_N = k)$.

3°) Déterminer pour k fixé, $\lim_{N \to +\infty} P(T_N > k)$. Comment peut-on interpréter le résultat.

4°) Justifier que l'espérance mathématique de T_N est donnée par $E(T_N) = \sum_{k=0}^{N} P(T_N > k)$. En déduire que

$$E(T_N) = \frac{N!}{N^N} \sum_{k=0}^{N} \frac{N^k}{k!}.$$

38 On considère deux entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à 1.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise.
On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de numéros différents obtenus à l'issue des tirages.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z.

39 On lance 4 dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note X le nombre de numéros différents sortis. Dans le cas particulier où les 4 numéros sont les mêmes, la variable aléatoire X prend la valeur 1.
Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

40 Soit U_1, U_2, …, U_n des urnes. Chaque urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard puis dans l'urne choisie, on tire une boule au hasard. On note X le numéro de la boule tirée.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance de X.

41 Un garagiste met en vente 21 voitures qu'il classe suivant 3 catégories de prix (X) et 3 catégories d'état (Y).

Y \ X	**1**	**2**	**3**
1	3	2	3
2	1	1	4
3	1	1	5

Déterminer la loi marginale de X et Y et la loi conjointe du couple (X, Y).

Réponses

$\boxed{1}$ 1°) b) $X = Z - (5 - Z)x$; $E(Z) = \frac{5}{4}$; $E(X) = \frac{5(1-3x)}{4}$

$\boxed{2}$ $P(X=1) = \frac{n^2 - n + 30}{(n+5)(n+6)}$; $P(X=-1) = 1 - P(X=1) = \frac{12n}{(n+5)(n+6)}$; le jeu est équitable si et seulement si $n = 3$ ou $n = 10$

$\boxed{3}$ On trouve $k = 6$.

$\boxed{4}$ 1°) 20 2°) a) $P(X=2) = \frac{1}{20}$; $P(X=3) = \frac{3}{20}$; $P(X=4) = \frac{6}{20}$; $P(X=5) = \frac{10}{20}$; $E(X) = \frac{17}{4}$; $V(X) = \frac{63}{80}$ b) $P(X>3) = \frac{4}{5}$ 5 2°) c) $E(X) = \frac{4(n+1)}{3}$; $V(X) = \frac{(n+1)(3n+2)}{3}$

$\boxed{5}$ 2°) $P(X=k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$; $X(\Omega) = [\![2\,;n]\!]$; $E(X) = \sum_{k=2}^{k=n} k\,P(X=k) = \frac{2(n+1)}{3}$; $V(X) = \frac{4(n+1)^2}{9}$

$\boxed{6}$ 1°) $X(\Omega) = [\![1\,;n-1]\!]$ 2°) $P(X=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 3°) $E(X) = \frac{n+1}{3}$

$\boxed{7}$ 3°) d) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2^{20}-1}{2-1} - 1 - 19 = 2^{20} - 21$

1°)

2°)

$x_n = P(A_n)$

$x_n = P(C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_{n-1} \cap (\text{A amène pile et B amène face à la } n\text{-ième partie}))$

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}$

$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}$

$z_n = \frac{1}{2^n}$

3°)

a) Donner l'expression de la plus grande valeur que peut prendre X.

b) $P(X = 2^N) = \frac{1}{2^{N-1}}$

c)

$(X = 2^k)$: on a une mise de 2^k euros à la partie qui conclut ; le jeu s'est arrêté à la k-ième partie

$(X = 2^k) = A_k \cup B_k$

$P(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}$

d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} 2^k \times P(X = 2^k)$$

On est obligé de séparer la somme.

$$E(X) = N + 1$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{N} 2^{2k} \times P(X = 2^k)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{2k} \times \frac{1}{2^k} + 2^{2N} \times \frac{1}{2^{N-1}}$$

$$E(X^2) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} 2^k\right) + 2^{N+1}$$

$$E(X^2) = 2 \times \frac{2^{N-1}-1}{2-1} + 2^{N+1}$$

$$E(X^2) = 2^N - 2 + 2^{N+1}$$

$$E(X^2) = 3 \times 2^N - 2$$

$\boxed{8}$ 1°) $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$; $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$; $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$; 2°) $n = 3$

$\boxed{9}$ **Partie A** 1°) $p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$; $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ **Partie B** 1°) $E(G_n) = 190\,p_n + 10 = 105 + 95\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 2°) $S \approx 1121,24...$

$\boxed{10}$ 2°) $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{2}{9}$ 3°) a) $E(X) = \frac{10}{3}$ et $V(X) = \frac{52}{9}$ b) $P(C) = \frac{4}{9}$ 4°) $P(E) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^5$

$\boxed{11}$ 1°) 0,0494 2°) $n \leqslant 13$

$\boxed{12}$ $2^k \geqslant 1000$; la valeur minimale de k est 10.

$\boxed{15}$ 1°) b) $P(X=1) = p$; $P(X=n) = q^{n-1}$; $P(X=k) = pq^{k-1}$ c) $S = \frac{(1-nq^{n-1})(1-q) + (q-q^n)}{(1-q)^2}$ 2°) $\frac{pq^{n-1}}{1-q^n}$

2°) Version Alexis Dubois (MPSIB année scolaire 2015-2016)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$$

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}kq^k$$

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^{k+1}$$

$$S_{n+1}=q\left(\sum_{k=0}^{n}kq^k+\sum_{k=0}^{n}q^k\right)$$

$$S_{n+1}=qS_n+q\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n(1-q)=q\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-(n+1)q^{n+1}$$

$$S_n(1-q)=\frac{q\left(1-q^{n+1}\right)-(1-q)(n+1)q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n=\frac{q\left(1-q^{n+1}\right)-(1-q)(n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

On cherche $S=\sum_{k=1}^{n-1}kq^{k-1}=\frac{1}{q}S_{n-1}$

$$S=\frac{1-q^n-n(1-q)q^{n-1}}{(1-q)^2}$$

Donc $S=\frac{1-q^n-nq^{n-1}(1-q)}{(1-q)^2}$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{k=1}^{n}kP(\mathrm{X}=k)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=(1-q)S+nq^{n-1}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1-q^n}{1-q}+nq^{n-1}-nq^{n-1}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1-q^n}{1-q}$$

16 1°) X_1 est la variable aléatoire égale à 1 ; $P(X_2=0)=\frac{1}{4}$, $P(X_2=1)=\frac{1}{2}$ $P(X_2=2)=\frac{1}{4}$

$P(X_3=0)=\frac{1}{8}$, $P(X_3=1)=\frac{3}{4}$, $P(X_3=2)=\frac{1}{8}$; $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)=\mathrm{E}(\mathrm{X}_3)=1$.

2°) $p_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$; $q_{n+1}=p_n+\frac{1}{2}q_n+r_n$; $r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

3°) $q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $p_n=q_n=\frac{1}{4}q_{n-1}=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$; $p_1=r_1=0$;

$\lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}r_n=\frac{1}{6}$; $\lim_{n\to+\infty}q_n=\frac{2}{3}$; $E(X_n)=q_n+2r_n=1$

18 $P(\text{"X impair"})=\frac{1}{2}$ (calcul de sommes assez longs, distinguer éventuellement les cas *n* pair et *n* impair).

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_n-\mathrm{B}_n&=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ pair}}}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ impair}}}\binom{n}{k}\\&=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ pair}}}(-1)^k\binom{n}{k}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{ impair}}}(-1)^k\binom{n}{k}\\&=(1-1)^n\\&=0\end{aligned}$$

20 1°) $E(\mathrm{Z})=\frac{N}{6}$; $V(\mathrm{Z})=\frac{5N}{36}$ 2°) Si $k\leqslant n$, alors $P(\mathrm{X}=k/\mathrm{Z}=n)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$; si $k>n$, alors $P(\mathrm{X}=k/\mathrm{Z}=n)=0$

21 1°) $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$; 2°) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{Y})=1$; $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{2a}$; $\sigma(\mathrm{Y})=\sqrt{8a}$

22 $\mathrm{cov}(\mathrm{X}\,;\mathrm{Y})=0$. Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes car $P(\mathrm{X}=0,\mathrm{Y}=1)=0\neq P(\mathrm{X}=0)\times P(\mathrm{Y}=1)$.

27

1°) $P(\mathrm{X}=2)=0{,}031$; $P(\mathrm{X}=3)=0{,}002$

x_i	0	1	2	3
$P(\mathrm{X}=x_i)$	0,722	0,031	0,245	0,002

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0{,}527$; $\mathrm{V}(\mathrm{X})=0{,}502$

2°)

$$p_n = 0,05 p_{n-1} + 0,05$$

$$c = \frac{1}{19}$$

$$p_n = 0,147 \times 0,05^{n-1} + \frac{1}{19}$$

$\boxed{28}$ $V(\mathrm{X}) = \dfrac{n(n-1)}{2^{n-1}}$

$\boxed{29}$ 1°) Il s'agit de $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{29}$

Clément Ferré mai 2015

2°) Lorsque le second joueur entre en scène, il reste $n-p$ boules dans l'urne.

$$P(\mathrm{X}_2 = 1 / \mathrm{X}_1 = p) = \frac{1}{n-p}$$

$$P(\mathrm{X}_2 = 0) = 0$$

$$P(\mathrm{X}_2 = 2 / \mathrm{X}_1 = p) = \frac{n-p-1}{n-p} \times \frac{1}{n-p-1} = \frac{1}{n-p}$$

$$P(\mathrm{X}_2 = m / \mathrm{X}_1 = p) = \frac{1}{n-p}$$

La loi conditionnelle de $(\mathrm{X}_2 / \mathrm{X}_1 = p)$ est uniforme.

$$P(\mathrm{X}_2 = m) = \sum_{p=1}^{n-1} P(\mathrm{X}_2 = m / \mathrm{X}_1 = p) \times P(\mathrm{X}_1 = p)$$

$$P(\mathrm{X}_2 = m) = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n-p} \times \frac{1}{n}$$

$$P(\mathrm{X}_2 = m) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n-p}$$

p parcourt $[\![1\,;n-1]\!]$ $\Rightarrow$ $n-p$ parcourt $[\![1\,;n-1]\!]$

On change la variable dans la somme $k = n-p$.

$$P(\mathrm{X}_2 = m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{pour } m \geqslant 1$$

Pour $m = 0$, on a : $P(\mathrm{X}_2 = 0) = P(\mathrm{X}_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{31}$ 1°) $P(\mathrm{F}_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$; $P(\mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

2°) $\mathrm{X} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathrm{F}_i}$; $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{F}_i) = 1$

3°) a) $\mathrm{cov}\left(1_{\mathrm{F}_i}\,; 1_{\mathrm{F}_j}\right) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$

b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \sum_{(i,\,j)\in E^2} \mathrm{cov}\left(1_{\mathrm{F}_i}\,; 1_{\mathrm{F}_j}\right) + \sum_{i \in E} \mathrm{V}\left(1_{\mathrm{F}_i}\right) \\
&= \frac{1}{n} + n \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \cancel{n} \times \frac{1}{\cancel{n}} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{34}$

1°) $\mathrm{F}(k) = P(\mathrm{Y} \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$

2°)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \sum_{k=0}^{n} P(\mathrm{Y} > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right] \\
&= n - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p
\end{aligned}$$

3°) $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \sim \dfrac{np}{p+1}$ (somme de Riemann)

35

$$X = \det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) R_{1,\sigma(1)} R_{2,\sigma(2)} \ldots R_{n,\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} E\left(R_{i,\sigma(i)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$X^2 = (\det M)^2$$

$$\begin{aligned} X^2 &= \sum_{(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} R_{i,\sigma(i)} R_{i,\sigma'(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} [\varepsilon(\sigma)]^2 \prod_{i=1}^{n} \left(R_{i,\sigma(i)}\right)^2 + \sum_{(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^{n} R_{i,\sigma(i)} R_{i,\sigma'(i)} \\ &= n! + \sum_{(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{i/\sigma(i) \neq \sigma'(i)} R_{i,\sigma(i)} R_{i,\sigma'(i)} \end{aligned}$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{\sigma \in S_n} 1 + \text{somme de produits qui valent tous } 0$$

$$E\left(X^2\right) = n!$$

36

La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

$$E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1$$

$$E(X) = 2$$

$$V(X) = (x_1 - 2)^2 \times P(X = x_1) + (x_2 - 2)^2 \times P(X = x_2) + (x_3 - 2)^2 \times P(X = x_3) + (x_4 - 2)^2 \times P(X = x_4)$$

$$V(X) = 1$$

38

On ne cherche pas la loi de probabilité de Z.

On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le numéro i est sorti, 0 sinon.

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(Z) = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right]$$

Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n.

$X_i X_j$ vaut 1 si i et j sont sortis et 0 sinon.

$X_i X_j$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p$.

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

$$V(Z) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \times \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right] + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right)^2\right]$$

Questions de cours

1 Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire définie sur un univers fini

2 Donner la formule donnant l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale ; redémontrer ce résultat.

3 Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

4 Énoncer et démontrer la formule de Kœnig-Huygens.

5 Donner la formule de linéarité pour l'espérance mathématique d'une variable aléatoire définie sur un univers fini. Démontrer ce résultat.

6 Définir la loi binomiale de paramètres n et p.