TS1

Contrôle du mardi 14 avril 2015 (50 minutes)

Prénom : ……………………………………………… **Nom :** ………………………… **Note : …. / 20**

I. (3 points)

Calculer $I=\int_0^{\pi}\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) bonus : 1 point)

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_x^{2x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Justifier que F est dérivable sur I et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On admet que la fonction F admet un maximum global sur I atteint en un réel x_0.
Tracer la représentation graphique de la fonction F sur l'écran de la calculatrice graphique.
Compléter :

$x_0\approx$ …………………… (valeur arrondie au millième) ; $\mathrm{F}(x_0)\approx$ …………………… (valeur arrondie au millième)

3°) **Bonus (à traiter sur une feuille à part)**

Déterminer la « valeur exacte » de x_0.

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-1\,;1]$ par $f(x)=\frac{3}{4}\left(1-x^2\right)$.

1°) Démontrer que *f* est une densité de probabilité sur I.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) admettant *f* pour densité de probabilité. Calculer $P\left(\mathrm{X}\geqslant\frac{1}{2}\right)$.

………..

………..

………..

3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) =$ ………………… ; $\mathrm{V}(\mathrm{X}) =$ …………………

IV. (1 point)

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{x(1-x)}$. On admettra que *f* est une densité de probabilité sur I. On note *P* la loi de probabilité associée sur l'intervalle I.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de l'intervalle $\mathrm{J} = [0,2\,;0,7]$ (valeur arrondie au millième).

…………………….. (un seul résultat, sans égalité)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point de *P* d'affixe 1.

À tout nombre complexe $z \neq 1$ on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z}{z-1}$.

1°) Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* d'affixe $z \neq 1$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

2°) Déterminer l'ensemble *F* des points M de *P* d'affixe $z \neq 1$ tels que $|z'| = 1$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

VI. (3 points)

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace d'arête *a* $(a \in \mathbb{R}_+^*)$. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CG}]$.
Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}}$.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Corrigé du contrôle du 14-4-2015

I.

Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x \, \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \sin^5 x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin^2 x\right)^2 \times \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2 x\right)^2 \times \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right) \times \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin x - 2\sin x \times \cos^2 x + \sin x \times \cos^4 x\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

II.

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $\mathrm{F}(x) = \int_x^{2x} \sqrt{\sin t}\, \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Justifier que F est dérivable sur I et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \int_0^x \sqrt{\sin t}\, \mathrm{d}t$ définie sur l'intervalle $\mathrm{J} = [0\,;\pi]$.

φ est dérivable sur J car la fonction $u : t \mapsto \sqrt{\sin t}$ est définie et continue sur J (on notera que $\forall t \in \mathrm{J} \quad u(t) \geqslant 0$).

$\forall x \in \mathrm{J} \quad \varphi'(x) = \sqrt{\sin x}$

D'après la relation de Chasles, on a : $\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^{2x} \sqrt{\sin t}\, \mathrm{d}t - \int_0^{x} \sqrt{\sin t}\, \mathrm{d}t$.

Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

Comme la fonction φ est dérivable sur J, la fonction $x \mapsto \varphi(2x)$ est dérivable sur I (composée de fonctions dérivables).

Donc F est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}'(x) &= 2\varphi'(2x) - \varphi'(x) \quad \text{(formule de dérivation d'une composée)} \\
&= 2\sqrt{\sin 2x} - \sqrt{\sin x}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que bien que l'on ne puisse donner une expression explicite de F (c'est une fonction « transcendante »), il est cependant possible de connaître sa dérivée.

2°) On admet que la fonction F admet un maximum global sur I atteint en un réel x_0.
Tracer la représentation graphique de la fonction F sur l'écran de la calculatrice graphique.
Compléter :

$x_0 \approx 1{,}445$ (valeur arrondie au millième) ; $\mathrm{F}(x_0) \approx 1{,}240$ (valeur arrondie au millième)

Sur la calculatrice, on lit : $\mathrm{X} = 1{,}4454699$; $\mathrm{Y} = 1{,}2398302$.

3°) **Bonus (à traiter sur une feuille à part)**

Déterminer la « valeur exacte » de x_0.

On détermine tout d'abord les variations de F sur I.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}'(x) &= 2\sqrt{2\sin x \cos x} - \sqrt{\sin x} \\
&= \sqrt{\sin x}\left(2\sqrt{2\cos x} - 1\right)
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle I, le facteur $\sqrt{\sin x}$ est positif ou nul. Il s'annule en 0.

On détermine le signe du facteur $2\sqrt{2\cos x} - 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.

On résout deux inéquations et une équation.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2\cos x} - 1 > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\cos x} > \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow x < \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

De même, on a : $2\sqrt{2\cos x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x > \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$ et $2\sqrt{2\cos x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$.

On en déduit que F est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\operatorname{Arccos}\frac{1}{8}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\operatorname{Arccos}\frac{1}{8}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que le maximum de F sur l'intervalle I est atteint pour $x=\text{Arccos}\dfrac{1}{8}$.

Donc $x_0=\text{Arccos}\dfrac{1}{8}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\text{Arccos}\dfrac{1}{8}=1,44546849...$.

On peut démontrer que $\text{Arccos}\dfrac{1}{8}$ est un nombre irrationnel.

Il n'est pas possible de calculer $\text{F}(x_0)$ de manière exacte.

III.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I}=[-1\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{3}{4}(1-x^2)$.

1°) Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.

• f définie et continue sur l'intervalle I (car c'est la restriction d'une fonction polynôme à l'intervalle I).

• f est positive ou nulle sur l'intervalle I (c'est-à-dire f est à valeurs positives ou nulles).

En effet, $\forall x\in\text{I}\quad x^2\leqslant 1$ donc $\forall x\in\text{I}\quad f(x)\geqslant 0$.

• On calcule l'intégrale de f sur I.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\text{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}(1-x^2)\,\text{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}$$

$$=1$$

D'après les trois conditions précédentes, f est une densité de probabilité sur I.

2°) Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω,P) admettant f pour densité de probabilité. Calculer $P\left(\text{X}\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$.

$$P\left(\text{X}\geqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\text{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\text{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)$$

$$=\frac{5}{32}$$

3°) Calculer l'espérance et la variance de X.

$$\text{E}(\text{X})=0\quad;\quad\text{V}(\text{X})=\frac{1}{5}$$

IV.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I}=[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{x(1-x)}$. On admettra que f est une densité de probabilité sur I. On note P la loi de probabilité associée sur l'intervalle I.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité de l'intervalle $\text{J}=[0,2\,;0,7]$ (valeur arrondie au millième).

0,151 (un seul résultat, sans égalité)

On calcule $\displaystyle\int_{0,2}^{0,7} f(x)\,\text{d}x$ à l'aide de la calculatrice.

La valeur exacte de la probabilité de J est $\dfrac{25\times\text{Arcsin}\dfrac{\sqrt{70}}{10}-25\times\text{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{21}+6}{50\pi}$.

On peut l'obtenir sur une calculatrice faisant du calcul formel (par exemple, la TI 92) ou en calculant l'intégrale grâce à un changement de variable (étudié dans le supérieur).

V.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O},\vec{u},\vec{v})$. On note A le point de P d'affixe 1.

À tout nombre complexe $z\neq 1$ on associe le nombre complexe $z'=\dfrac{\text{i}z}{z-1}$.

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z \neq 1$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow z'=0 \text{ ou } \left(z' \neq 0 \text{ et } \arg z'=0 \ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \arg \frac{\mathrm{i}z}{z-1}=0 \ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \arg \mathrm{i}+\arg \frac{z}{z-1}=0 \ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \left(z \neq 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}+\arg \frac{z}{z-1}=0 \ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O} \text{ ou } \left(\mathrm{M} \neq \mathrm{O} \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=-\frac{\pi}{2} \ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O} \text{ ou } \left(\mathrm{M} \neq \mathrm{O} \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} ; \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)=-\frac{\pi}{2} \ [\pi]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

E est le cercle de diamètre $[\mathrm{OA}]$ privé de A.

Remarque :

Il revient au même d'écrire $-\frac{\pi}{2} \ [\pi]$ ou $\frac{\pi}{2} \ [\pi]$.

2°) Déterminer l'ensemble F des points M de P d'affixe $z \neq 1$ tels que $|z'|=1$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow |z'|=1 \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{i}z}{z-1}\right|=1 \\
&\Leftrightarrow \frac{|\mathrm{i}z|}{|z-1|}=1 \\
&\Leftrightarrow |\mathrm{i}z|=|z-1| \\
&\Leftrightarrow |\mathrm{i}| \times |z|=|z-1| \\
&\Leftrightarrow 1 \times |z|=|z-1| \\
&\Leftrightarrow |z|=|z-1| \\
&\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\mathrm{AM}
\end{aligned}$$

Conclusion :

F est la médiatrice du segment $[\mathrm{OA}]$.

VI.

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CG}]$.

Calculer les produits scalaires $p_1=\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$, $p_2=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $p_3=\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}}$.

- $p_1=\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$

B est le projeté orthogonal de G sur la droite (AI).

Donc $p_1=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ sont colinéaires et de même sens.

Donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AI} \\
&= a \times \frac{a}{2} \\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

- $p_2=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$

B est le projeté orthogonal de J sur la droite (AB).

Donc $p_2=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ sont colinéaires et de même sens.

Donc

$$\begin{aligned}
p_2 &= \mathrm{AB} \times \mathrm{IB} \\
&= a \times \frac{a}{2} \\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

- $p_3=\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}}$

$p_3=\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EB}}$

Or (AF) et (EB) sont les diagonales du carré ABFE.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ sont orthogonaux.

D'où $p_3=0$.