Exercices sur le rang d'une matrice et les opérations élémentaires

1 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ n réels. On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots\cdots & & 0 & \lambda_0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$ (matrice carrée d'ordre n).

Déterminer le rang de A.

2 Soit A une matrice carrée d'ordre n ($n \geqslant 2$).
1°) Soit B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j de A (i et j étant deux entiers distincts compris entre 1 et n au sens large).
Démontrer que si A est inversible, alors B est inversible et calculer B^{-1} en fonction de A^{-1}.
2°) Soit C la matrice obtenue en ajoutant deux fois la i-ième colonne à la j-ième colonne (i et j étant deux entiers distincts compris entre 1 et n au sens large).
Démontrer que si A est inversible, alors C est inversible et calculer C^{-1} en fonction de A^{-1}.

3 Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n.
On note B la matrice obtenue à partir de A de telle sorte que la première ligne de B soit égale à la dernière ligne de A.
Démontrer que si A est inversible, alors B est inversible et calculer B^{-1} en fonction de A^{-1}.

4 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre dans E et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément de K^n.

On pose $u=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $v_i = e_i + u$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ soit liée.

Version bis :

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre dans E et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément de K^n.

On pose $u=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $v_i = e_i + u$.

Étudier si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre ou liée suivant les valeurs de $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

5 Déterminer le rang de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & \cos^2 a & \cos 2a \\ 1 & \cos^2 b & \cos 2b \\ 1 & \cos^2 c & \cos 2c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

6 Déterminer le rang de la matrice $A=\begin{pmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a & \cos 2a \\ \cos^2 b & \sin^2 b & \cos 2b \\ \cos^2 c & \sin^2 c & \cos 2c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels quelconques.

7 1°) Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère l'application $\Delta : F \to F$
$f \mapsto g$ définie par $g(x) = f(x+1) - f(x)$.
Démontrer que Δ est un endomorphisme de F.
2°) On suppose que f est une fonction polynomiale de degré $n \geqslant 1$. Que vaut le degré de Δf ?
3°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
a) On considère la matrice A carrée d'ordre n définie par $a_{i,j} = f(i+j-1)$.
Préciser la matrice
A_1 obtenue à partir de A en appliquant les opérations élémentaires $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ (utiliser l'application Δ) ;
A_2 obtenue à partir de A_1 en appliquant les opérations élémentaires $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour $k \geqslant 3$.
Préciser la forme de A_n.
b) On suppose f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.
Que peut-on dire de la dernière colonne de A_n ?
La matrice A est-elle inversible ?

Solutions

$\boxed{1}$ Il est intéressant d'utiliser les opérations élémentaires.
On échange la première et la dernière ligne et l'on obtient aisément que le rang est n si $\lambda_0 \neq 0$ et $n-1$ si $\lambda_0 = 0$.

$\boxed{2}$
voir mail sur monty.olivier daté du 10 avril 2015 avec photo du tableau d'Arthur Pentecoste

1°) **colle 4-4-2015**

Le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de B est le même que celui de A.
On peut écrire $\{C_i(A), 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{C_i(B), 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
Le rang de B est donc égal à celui de A.

On a donc l'équivalence A inversible $\Leftrightarrow$ B inversible.

B est obtenu par l'opération : $C_i(A) \leftrightarrow C_j(A)$

B^{-1} est obtenu par l'opération : $L_i(B) \leftrightarrow L_j(B)$

$\boxed{3}$
$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\, f$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$
$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\, f$ où $\mathcal{B}' = (e_n, e_1, ..., e_{n-1})$
$B = P^{-1}AP$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} = \text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$

$\boxed{4}$
On trouve : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1$.

$\boxed{5}$
Le 20-3-2022
opération élémentaire $C_3 \leftarrow 2C_2 - C_1$.

$\boxed{6}$ Même date

$\boxed{7}$ 3°) b) $A_n = \begin{pmatrix} f(1) & \Delta f(1) & \cdots & \Delta^{n-1} f(1) \\ f(2) & \Delta f(2) & \cdots & \Delta^{n-1} f(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(n) & \Delta f(n) & \cdots & \Delta^{n-1} f(n) \end{pmatrix}$

Source de l'exercice $\boxed{1}$:

Problème sur les matrices compagnons fait avec Pierre Dupuy semaine du 17 au 22 mars 2014.
Sujet de CCP MP 2001 Mathématiques 2.

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots\ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \ \ldots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \ \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \ \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ avec } P = X^n + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$