TS1

Contrôle du mardi 31 mars 2015 (50 minutes)

Prénom : ………………………………………..………. **Nom :** ………………….…. **Note : …. / 20**

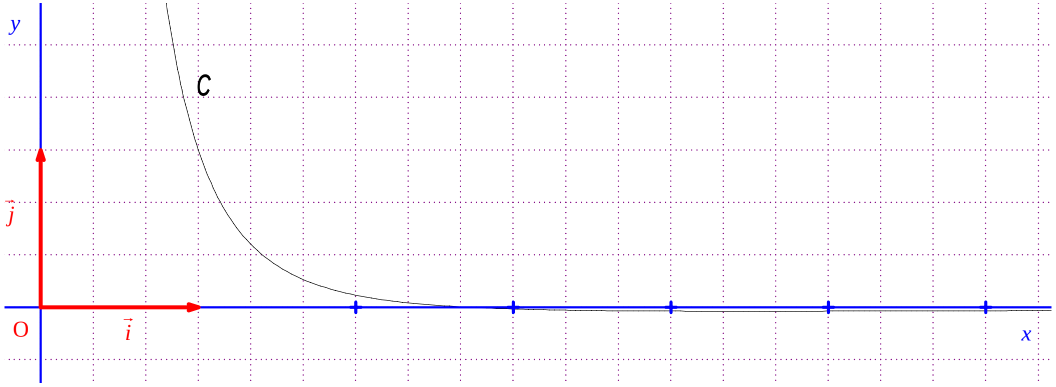
I. (2 points)

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2t}}{2e^{2t}+1}\,dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 4t\,dt$. On effectuera les calculs au brouillon « à la main ».

$I=$ .... $J=$ ....

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 1 point)

Sur le graphique ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec 3 centimètres pour unité graphique.



1°) Démontrer que la fonction F : $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

………...

………...

………...

………...

2°) Hachurer la partie du plan D délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D (valeur exacte d'abord en unité d'aire puis valeur en cm^2 arrondie au centième).

………...

………...

………...

………...

………...

III. (2 points)

Pour tout réel a, on pose $I(a)=\displaystyle\int_0^{a}xe^{-x^2}\,dx$.

Calculer $I(a)$ en fonction de a et déterminer la limite $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

………...

………...

………...

………...

………...

IV. (2 points)

Calculer la valeur moyenne μ de la fonction $f:x\mapsto 2x-x^2$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

………...

………...

………...

Tracer dans l'espace vierge ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant 4 cm pour unité graphique sur l'axe des abscisses et 3 cm pour unité graphique sur l'axe des ordonnées. Faire apparaître μ sur l'axe des ordonnées et construire le rectangle associé à μ.

V. (5 points : 1 point par réponse)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer $f(x)$ en fonction de x.

1°) Calculer la valeur exacte de $f(0)$ « à la main ».

$f(0)=$..................... (un seul résultat)

2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de $f(1)$ et de $f(-1)$.

$f(1)\approx$.................. (valeur arrondie au millième) $f(-1)\approx$.................. (valeur arrondie au millième)

3°) On admet que : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

a) Quel théorème permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0{,}2$ (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$?

.... (répondre sans faire de phrase)

b) On note α la solution de (E).
À l'aide de la calculatrice, déterminer sans justifier le meilleur encadrement possible de α par deux décimaux d'ordre 2.

.... $<\alpha<$ ....

VI. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne :

- les points $\mathrm{A}(3\,;2\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;0\,;1)$;
- les vecteurs $\vec{u}(1;1;0)$, $\vec{v}(0;1;1)$ et $\vec{w}(2;0;0)$.

On note D la droite de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$ et P le plan de repère $\left(\mathrm{B}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

1°) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite D et un système d'équations paramétriques du plan P.

$D\begin{cases} x= \text{.......................} \\ y= \text{.......................} \qquad \text{......................} \\ z= \text{.......................} \end{cases}$; $P\begin{cases} x= \text{...................................} \\ y= \text{...................................} \qquad \text{......................} \\ z= \text{...................................} \end{cases}$

2°) Démontrer que D et P sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 31-3-2015

I.

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2t}}{2e^{2t}+1}\,dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 4t\,dt$. On effectuera les calculs au brouillon « à la main ».

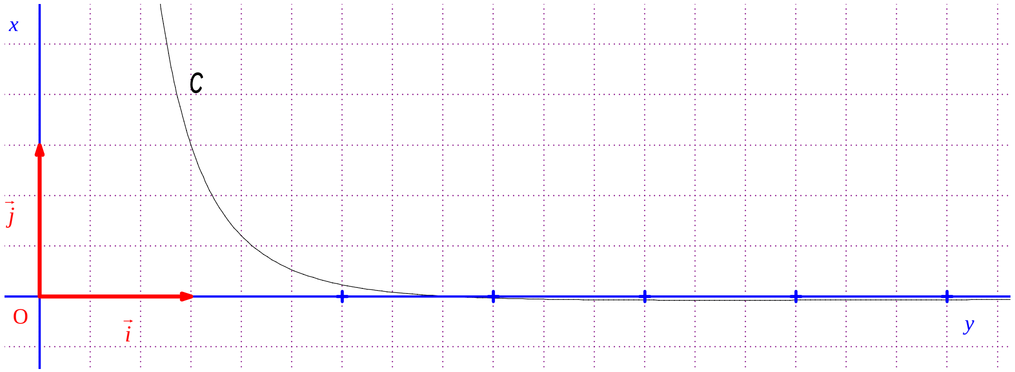
$I=\dfrac{\ln 19-\ln 3}{4}$ ou $I=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{19}{3}$ $\qquad J=\dfrac{3}{8}$

$$\begin{aligned}
I&=\left[\frac{1}{4}\ln\left|\,2e^{2t}+1\right|\right]_0^{\ln 3}\\
&=\frac{1}{4}\ln\left|\,2e^{2\ln 3}+1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\,2e^{0}+1\right|\\
&=\frac{1}{4}\ln\left|\,2e^{\ln 9}+1\right|-\frac{1}{4}\ln 3\\
&=\frac{1}{4}\ln 19-\frac{1}{4}\ln 3\\
&=\frac{\ln 19-\ln 3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J&=\left[-\frac{\cos 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=-\frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{3}-\left(-\frac{1}{4}\cos 0\right)\\
&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\\
&=\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

II.

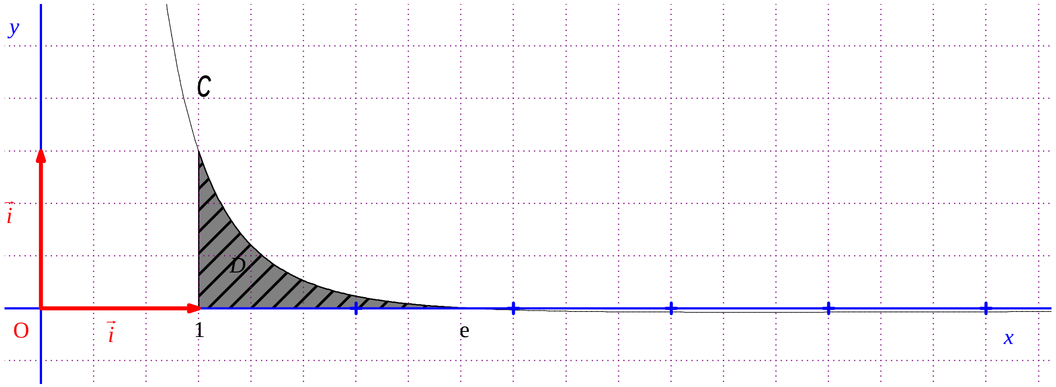
Sur le graphique ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ avec 3 centimètres pour unité graphique.



1°) Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \mathrm{F}'(x)&=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}\\
&=\frac{1-\ln x}{x^2}\\
&=f(x)
\end{aligned}$$

2°) Hachurer la partie du plan D délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D (valeur exacte d'abord en unité d'aire puis valeur en cm^2 arrondie au centième).



Il n'y a pas besoin de tracer les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$ sur le graphique.

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0\\
&\Leftrightarrow 1-\ln x=0\\
&\Leftrightarrow \ln x=1\\
&\Leftrightarrow x=\mathrm{e}
\end{aligned}$$

La fonction f est continue et positive sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

On calcule $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{F}(x)\right]_1^{\mathrm{e}}=\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ u. a.

$1 \text{ u. a.} = 9 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = \dfrac{9}{\mathrm{e}} \text{ cm}^2$

$\mathcal{A} \approx 3{,}31 \text{ cm}^2$ (valeur arrondie au centième)

> De nombreux élèves ont employé le symbole $=$ au lieu du symbole $\approx$.
> C'est une faute qui peut s'expliquer par l'emploi – erroné – quasi-systématique du symbole $=$ au lieu du symbole $\approx$.

III.

Pour tout réel a, on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Calculer $I(a)$ en fonction de a et déterminer la limite $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

$$I(a) = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1-\mathrm{e}^{-a^2}}{2}$$

$\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-a^2} = 0$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} I(a) = \dfrac{1}{2}$.

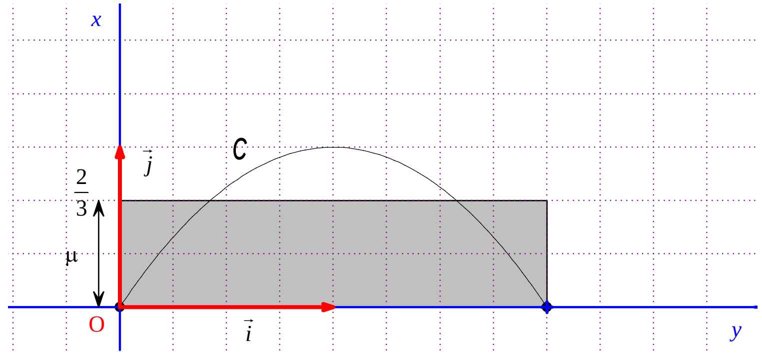
IV.

Calculer la valeur moyenne μ de la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right)$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

Tracer dans l'espace vierge ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant 4 cm pour unité graphique sur l'axe des abscisses et 3 cm pour unité graphique sur l'axe des ordonnées. Faire apparaître μ sur l'axe des ordonnées et construire le rectangle associé à μ.



V.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer $f(x)$ en fonction de x.

1°) Calculer la valeur exacte de $f(0)$ « à la main ».

$f(0) = \ln 2$ (un seul résultat)

2°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur arrondie au millième de $f(1)$ et de $f(-1)$.

$f(1) \approx 0{,}463$ (valeur arrondie au millième) $\qquad f(-1) \approx 1{,}125$ (valeur arrondie au millième)

> Pour le calcul de $f(1)$ sur calculatrice TI 83, on obtient l'affichage : 0,463421992663.

3°) On admet que : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

a) Quel théorème permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0{,}2$ (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$?

corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa forme généralisée (répondre sans faire de phrase)

b) On note α la solution de (E).
À l'aide de la calculatrice, déterminer sans justifier le meilleur encadrement possible de α par deux décimaux d'ordre 2.

$4{,}10 < \alpha < 4{,}11$

Sur calculatrice TI 83, on rentre les fonctions suivantes :
$Y1 = \text{fnInt}\left(\left(e \wedge (-X * A)\right) / (1+A), A, 0, 1\right)$ [attention, il faut utiliser le « petit » signe –]
$Y2 = 0.2$

L'intégrale se trouve dans $\boxed{\text{math}}$ MATH 9 : fnInt(
Pour les modèles plus récents, on rentrera $Y1 = \int_0^1 e^{-X*A} / (1+A)\ dA$.

On trace les représentations graphiques en prenant $X \in [-0,5\,;5]$ et $Y \in [-0,5\,;1]$.
Le tracé est assez lent.
On utilise ensuite la commande de la calculatrice permettant de déterminer l'intersection de deux courbes $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs) 5 : intersect. Appuyer sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

→ courbe 1 ? se déplacer sur la courbe représentative de *f* puis touche $\boxed{\text{entrer}}$.

→ courbe 2 ? se déplacer sur la courbe la fonction $x \mapsto 0{,}2$ puis touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient l'affichage suivant :

$$X = 4.106392.$$

Il s'agit d'une valeur approchée de α.
On notera qu'il n'est pas possible de connaître la valeur exacte de α.

VI.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne :
- les points $A(3\,;2\,;0)$ et $B(0\,;0\,;1)$;
- les vecteurs $\vec{u}(1;1;0)$, $\vec{v}(0;1;1)$ et $\vec{w}(2\,;0\,;0)$.

On note *D* la droite de repère $\left(A, \vec{u}\right)$ et *P* le plan de repère $\left(B, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

1°) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite *D* et un système d'équations paramétriques du plan *P*.

$$D \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad ; \quad P \begin{cases} x = 2t' \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \quad \left((t\,;t') \in \mathbb{R}^2\right)$$

2°) Démontrer que *D* et *P* sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

On résout le système suivant : $\begin{cases} 3+\lambda = 2t' & (1) \\ 2+\lambda = t & (2) \\ 0 = 1+t & (3) \end{cases}$.

1$^{\text{ère}}$ méthode : par substitution (la plus simple)

Avec l'équation (3), on trouve : $t = -1$.

On remplace dans (2) ; on obtient alors : $\lambda = -3$.

On remplace t et λ dans (1). On trouve $t' = 0$.

On vérifie que le triplet $(-3\,;-1\,;0)$ est solution du système formé par les équations (1), (2), (3).

Donc *D* et *P* sont sécants en un point I.

On a : $\begin{cases} x_I = 3-3 = 0 \\ y_I = 2-3 = -1 \\ z_I = 0 \end{cases}$ (en utilisant le système d'équations paramétriques de la droite).

On en conclut que I a pour coordonnées $(0\,;-1\,;0)$.

2$^{\text{e}}$ méthode : utilisation des matrices

Le système s'écrit : $\begin{cases} -\lambda + 2t' = 3 \\ -\lambda + t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$, ce qui donne la forme matricielle suivante : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Grâce à la calculatrice, on vérifie que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Par suite, on obtient : $\begin{pmatrix} \lambda \\ t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc *D* et *P* sont sécants en un point I.

On a : $\begin{cases} x_I = 3-3 = 0 \\ y_I = 2-3 = -1. \\ z_I = 0 \end{cases}$

On en conclut que I a pour coordonnées $(0\,;-1\,;0)$.

3$^{\text{e}}$ méthode : utilisation de la calculatrice

On commence par écrire le système sous la forme $\begin{cases} \lambda - 2t' = -3 & (1') \\ \lambda - t = -2 & (2') \\ t = -1 & (3') \end{cases}$ de manière à pouvoir le rentrer dans la calculatrice.