TS1

Contrôle du mardi 24 mars 2015
(50 minutes)

Prénom : …………………………………………….………… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (4 points)

Compléter sans rature et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$	………………………………………………
$\dfrac{1-2x}{x^2-x}$	$]0\,;1[$	………………………………………………
$(1-3x)^8$	$\mathbb{R}$	………………………………………………
$1-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$	$\mathbb{R}$	………………………………………………

II. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \neq -1$, on ait $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

$a=$ ………… $b=$ …………

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ sous la forme d'un seul quotient.

$F(x)=$ ………………………………………………

III. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (détailler les calculs).

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Dans les exercices **IV** et **V**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

IV. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

On note A et B les points de P d'affixes respectives 2 et i.
On note P^* le plan P privé de A et B.

Pour tout nombre complexe z distinct de 2 et de i, on pose $Z=\dfrac{z-\text{i}}{z-2}$.

1°) On note M le point d'affixe z.
Compléter à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$\arg Z=$ .... $[2\pi]$

2°) On note :

- E l'ensemble des points M de P^* d'affixe z tels que $\arg Z=0 \quad [2\pi]$;
- F l'ensemble des points M de P^* d'affixe z tels que $\arg Z=-\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Soit M un point de P^* d'affixe z $\left(z\neq 2 \text{ et } z\neq \text{i}\right)$.

Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$\text{M}\in E \Leftrightarrow$ ....

Compléter la phrase suivante (sans employer le mot « ensemble » ni parler du point M).

E est ……..

Effectuer la recherche de l'ensemble F sur le même modèle.

Faire un graphique en prenant 2 cm pour unité de longueur et représenter les ensembles E et F avec soin et précision.

V. (2 points)

On note P^* le plan P privé du point O.
On note f l'application de P^* dans P qui à tout point M d'affixe $z\neq 0$ fait correspondre le point M' d'affixe $z'=z+\dfrac{1}{z}$. Le point M' est appelé l'image de M par f.
Déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Expliquer le raisonnement.

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

……….

Corrigé du contrôle du 24-3-2015

I.

Compléter sans rature et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$	$-3\sqrt{1-x^2}$
$\dfrac{1-2x}{x^2-x}$	$]0\,;1[$	$-\ln\left\|x^2-x\right\|=-\ln\left(x-x^2\right)$
$(1-3x)^8$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{(1-3x)^9}{27}=\dfrac{(3x-1)^9}{27}$
$1-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$	$\mathbb{R}$	$-2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)=x-2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)$

2^e^ primitive :

$\forall x\in\,]0\,;1[\quad x^2-x<0$ (règle du signe d'un trinôme du second degré) donc $\left|x^2-x\right|=x-x^2$

4^e^ primitive :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad 1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$$

ou

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad 1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}=1-\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1}$$

Dans chaque cas, on se réfère à la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Selon la forme utilisée, on aboutit sur l'une ou l'autre des formes de primitive donnée dans le tableau ci-dessus.
Il est possible de passer de l'une à l'autre directement en utilisant les propriétés de l'exponentielle et du logarithme népérien.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad -2\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)&=-2\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)\\&=-2\ln\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\\&=-2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)+2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)\\&=-2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)+2\times\frac{x}{2}\\&=x-2\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1\right)\end{aligned}$$

II.

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x\neq-1$, on ait $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

$a=3$ $\qquad b=1$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f(x)&=\frac{3(x+1)+1}{(x+1)^3}\\&=\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

2°) En déduire l'expression d'une primitive F de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ sous la forme d'un seul quotient.

$$F(x)=-\frac{6x+7}{2(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad F(x)&=3\times\left(-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2(x+1)^2}\\&=-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}\\&=-\frac{3\times2(x+1)+1}{2(x+1)^2}\\&=-\frac{6x+7}{2(x+1)^2}\end{aligned}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (détailler les calculs).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = a \times \mathrm{e}^{-x} + (ax+b) \times (-\mathrm{e}^{-x})$$

$$= (a-b-ax)\mathrm{e}^{-x}$$

Pour que F soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$, il suffit de choisir les réels a et b de telle sorte qu'ils vérifient le système $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b = 2 \end{cases}$.

Par résolution immédiate, on obtient : $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$.

On vérifie aisément que ces réels conviennent bien.

Dans les exercices **IV** et **V**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

IV.

On note A et B les points de P d'affixes respectives 2 et i.
On note P^* le plan P privé de A et B.

Pour tout nombre complexe z distinct de 2 et de i, on pose $Z = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z-2}$.

1°) On note M le point d'affixe z.
Compléter à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

On peut noter que pour $z \neq 2$ et $z \neq \mathrm{i}$, $Z \neq 0$ donc Z a un bien un argument.

$$\arg Z = \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \quad [2\pi]$$

ou

$$\arg Z = \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \quad [2\pi]$$

2°) On note :

- E l'ensemble des points M de P^* d'affixe z tels que $\arg Z = 0 \quad [2\pi]$;
- F l'ensemble des points M de P^* d'affixe z tels que $\arg Z = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Soit M un point de P^* d'affixe z $(z \neq 2 \text{ et } z \neq \mathrm{i})$.

Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [2\pi]$$

Compléter la phrase suivante (sans employer le mot « ensemble » ni parler du point M).

E est la droite (AB) privée du segment [AB].

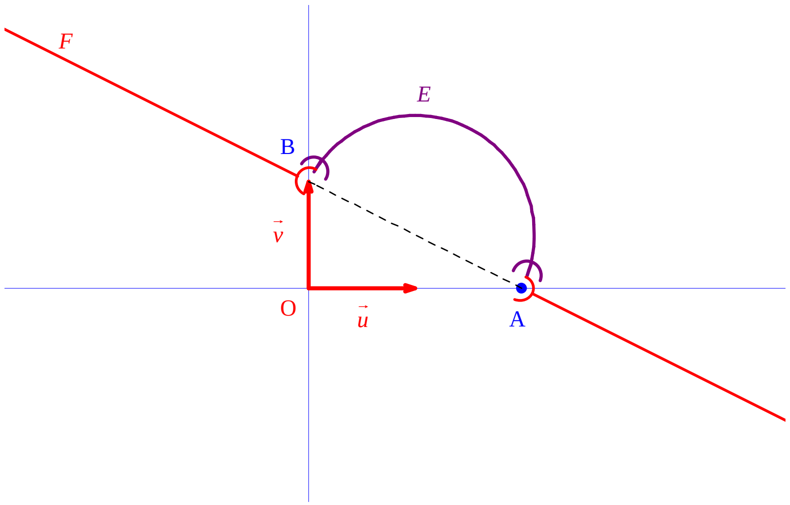
Effectuer la recherche de l'ensemble *F* sur le même modèle.

Soit M un point de P^* d'affixe z $(z \neq 2 \text{ et } z \neq \mathrm{i})$.

$$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

F est le demi-cercle de diamètre [AB] ne contenant pas le point O (ou situé au-dessus de la droite (AB)) privé de A et B.

Faire un graphique en prenant 2 cm pour unité de longueur et représenter les ensembles *E* et *F* avec soin et précision.



V.

On note P^* le plan P privé du point O.
On note f l'application de P^* dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ fait correspondre le point M' d'affixe $z' = z + \dfrac{1}{z}$. Le point M' est appelé l'image de M par f.
Déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Expliquer le raisonnement.

Soit M un point de P^* d'affixe z $(z \neq 0)$.

$M \in \mathscr{C}$ donc il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$ (on s'appuie sur le cours sur les équations paramétriques complexes de cercle).

On a alors $z' = e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$.

On observe que z' est un réel.

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\cos\theta$ décrit $[-1\,;1]$ (en effet, la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$) et donc $2\cos\theta$ décrit l'intervalle $[-2\,;2]$.

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, M' décrit le segment $[AB]$ où A et B sont les points d'affixes respectives – 2 et 2.

Attention, certains élèves ont utilisé un raisonnement par équivalence (du type $M' \in E \Leftrightarrow \ldots$).
Ce mode de raisonnement n'est pas du tout utilisable ici.