TS1

Contrôle du mardi 3 mars 2015 (50 min)

Prénom : …………………………….…… **Nom :** ………………………..…… **Note : …. / 20**

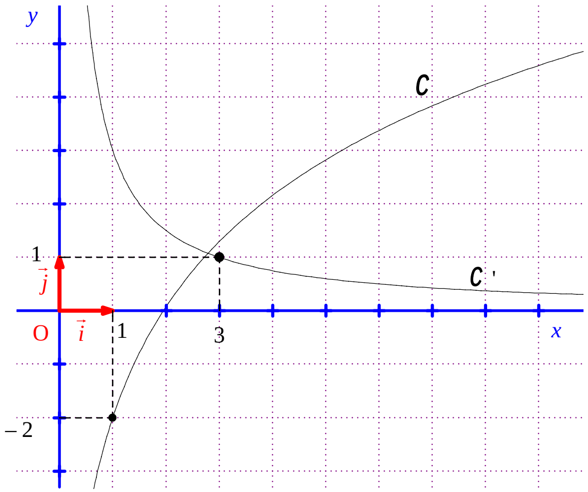
I. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto a\ln x + b$ définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ où a et b sont deux réels.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$ les représentations graphiques respectives de f et de $f\,'$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les réels a et b en détaillant la démarche.

2°) Déterminer l'abscisse du point en lequel $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses.



Ne rien écrire sur le graphique.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$ et Δ la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1°) La droite D_m d'équation $x = m$ $(m > 0)$ coupe $\mathcal{C}$ en A et Δ en B.

Exprimer la distance AB en fonction de *m*.

AB = ……………………… (un seul résultat)

2°) La droite D'_m d'équation $y = m$ coupe $\mathcal{C}$ en E et Δ en F.

Exprimer la distance EF en fonction de *m*.

EF = ……………………… (un seul résultat)

III. (2 points)

Calculer le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 du nombre $\mathrm{N}=2^{2014}\times 3^{509}$.

....

....

....

....

....

IV. (3 points)

Déterminer l'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(x+2)\leqslant \ln(x^2)$.

$S=$..................................

V. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}\right)$ définie sur $]0\,;1[$.

Déterminer les limites de f en 0^+ et en 1^- en détaillant toute la démarche.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VI. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - 4x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ en détaillant la démarche.

....

....

....

....

....

VII. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x \times \ln(x+1)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminer la limite de f en 0^+ en détaillant la démarche.

....

....

....

....

....

....

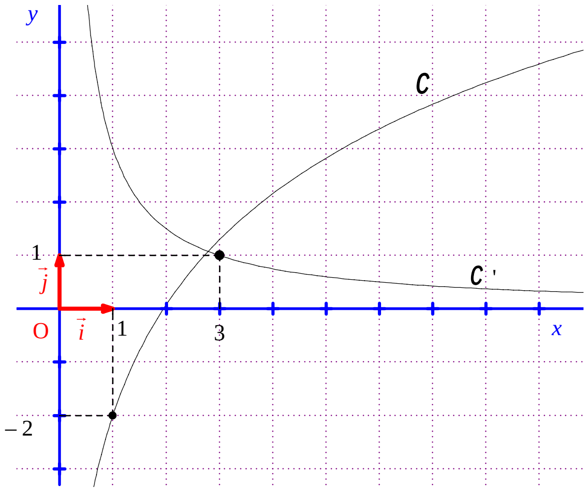
Corrigé du contrôle du 3-3-2015

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto a \ln x + b$ définie sur $]0\,;+\infty[$ où a et b sont deux réels.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les représentations graphiques respectives de f et de f' dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer les réels a et b en détaillant la démarche.
2°) Déterminer l'abscisse du point en lequel $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses.



Ne rien écrire sur le graphique.

On ne peut utiliser que les deux points marqués sur le graphique.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{a}{x}$

D'après le graphique, $f(1) = -2$ et $f'(3) = 1$.

On a donc $a \ln 1 + b = -2$ et $\dfrac{a}{3} = 1$.

Par suite, $a = 3$ et $b = -2$.

2°) On résout l'équation $f(x) = 0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \ln x = \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$$

Le point en lequel $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses a pour abscisse $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

On ne donne pas de valeur approchée de $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

II.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln x$ et Δ la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1°) La droite D_m d'équation $x = m \quad (m > 0)$ coupe $\mathcal{C}$ en A et Δ en B.
Exprimer la distance AB en fonction de *m*.

$$\mathrm{AB} = m - \ln m \text{ (un seul résultat)}$$

Il est inutile de mettre une valeur absolue puisque l'on sait que la courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

2°) La droite D'_m d'équation $y = m$ coupe $\mathcal{C}$ en E et Δ en F.
Exprimer la distance EF en fonction de *m*.

$$\mathrm{EF} = \mathrm{e}^m - m \text{ (un seul résultat)}$$

Même remarque qu'au 1°).

III.

Calculer le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 du nombre $\mathrm{N} = 2^{2014} \times 3^{509}$.

Le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 du nombre N est $\mathrm{A} = \mathrm{E}(\log \mathrm{N}) + 1$ (formule du cours).

$$\log \mathrm{N} = \log\left(2^{2014} \times 3^{509}\right)$$
$$= 2014 \log 2 + 509 \log 3$$

On utilise la calculatrice (touche $\boxed{\log}$ directement).

$\mathrm{A} = 849 + 1 = 850$

Le nombre N s'écrit en base 10 avec 850 chiffres.

IV.

Déterminer l'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(x+2) \leqslant \ln\left(x^2\right)$.

$$S =]-2\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$$

Explication détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x+2) \leqslant \ln(x^2)$ (1).

Le système de conditions d'existence s'écrit : $\begin{cases} x+2>0 \\ x^2>0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} x>-2 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

On résout donc l'inéquation dans $]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow x+2 \leqslant x^2$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$ (les racines du polynôme x^2-x-2 sont -1 et 2)

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S =]-2\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}\right)$ définie sur $]0\,;1[$.

Déterminer les limites de f en 0^+ et en 1^- en détaillant toute la démarche.

1ère méthode :

$\forall x \in]0\,;1[\quad f(x) = \ln\left(1-\sqrt{x}\right) - \ln x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(1-\sqrt{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une différence, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \ln\left(1-\sqrt{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0 \end{array}\right\}$ donc par limite d'une différence, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

2e méthode :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}}_{X} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}}_{X} = 0+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - 4x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ en détaillant la démarche.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-4) = -4 \end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right) = -4$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right) = -4 \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x \times \ln(x+1)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminer la limite de f en 0^+ en détaillant la démarche.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x \ln x \times \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0 \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(limite de référence)} \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.