TS1

Contrôle du mardi 3 février 2015
(50 min)

Prénom : ……………………………..…… **Nom :** ………………………..……

Note : …. / 20

I. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+2\sin^2 x$.

1°) Linéariser $f(x)$.

………

………

………

………

………

………

2°) Linéariser $\left[f(x)\right]^2$.

………

………

………

………

………

………

………

II. (4 points : 3 points + 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

………

………

………

………

………

III. (3 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a : $-x \leqslant \left(x^2+1\right) f\left(x\right) \leqslant x$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ en détaillant toute la démarche.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ en détaillant la démarche.

………

………

………

………

V. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

Quel est le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]0\,;\pi\right[$?

Répondre en une phrase sans calculer la dérivée de f en utilisant le sens de variation de la fonction sinus sur I.

………

………

………

………

Déterminer les limites de f aux bornes l'intervalle I c'est-à-dire en 0^+ et π^- en détaillant la démarche.

………

………

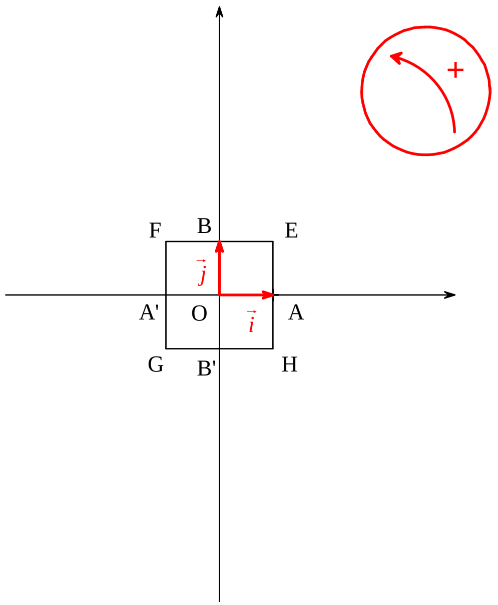
………

Dresser le tableau de variations de f sur I avec les limites déterminées précédemment.

Prénom : ……………………………..…… **Nom :** ………………………..……

VI. (4 points)

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le carré EFGH avec $E(1;1)$, $F(-1;1)$, $G(-1;-1)$, $H(1;-1)$.



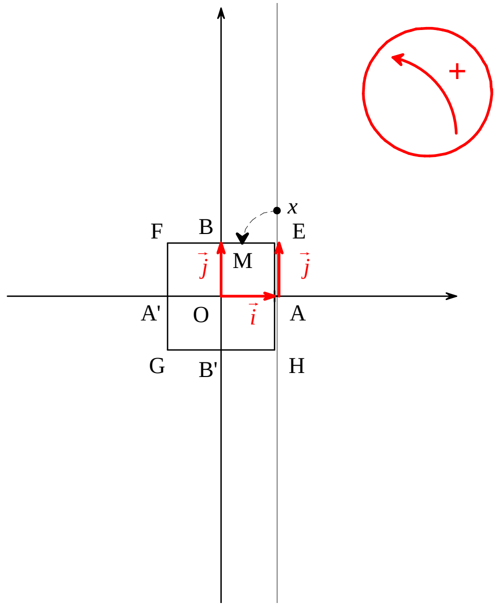
On munit la droite (AE) du repère $\left(A, \vec{j}\right)$.
La droite (AE) muni de ce repère représente alors la droite des réels.
On enroule cette droite autour du carré EFGH comme un fil fixé en A autour d'une bobine de forme carrée.

On procède ainsi :

- la demi-droite [AE), qui correspond aux réels positifs, est enroulée dans le sens direct ;

- la demi-droite [AH), qui correspond aux réels négatifs, est enroulée dans le sens indirect.

Tout réel x vient alors s'appliquer sur un point image M situé sur le « bord » du carré EFGH.



Par exemple, le réel 1 vient s'appliquer en E, le réel 2 vient s'appliquer en B, le réel – 1 vient s'appliquer en H, le réel – 2 vient s'appliquer en B'.

Répondre aux questions sans justifier.

1°)

En quel point vient s'appliquer le réel 36 ? ………………

En quel point vient s'appliquer le réel 2015 ? ………………

En quel point vient s'appliquer le réel – 24 ? ………………

2°) Soit x et x' deux réels. On note M et M' leurs images respectives sur le carré.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et x' pour que M et M' soient confondus.

$M = M' \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 3-2-2015

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+2\sin^2 x$.

1°) Linéariser $f(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1+1-\cos 2x \qquad (\text{formule : } 2\sin^2 x = 1-\cos 2x)$$
$$= 2-\cos 2x$$

2°) Linéariser $\left[f(x)\right]^2$ (résultat sous la forme la plu simple possible).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[f(x)\right]^2 = (2-\cos 2x)^2$$
$$= 4-4\cos 2x+\cos^2 2x$$
$$= 4-4\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}$$
$$= \frac{9-8\cos 2x+\cos 4x}{2}$$

II.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1+2x \leqslant \sin x \leqslant 1+2x$

On a maintenant deux cas :

Si $x>1$, alors $\dfrac{-1+2x}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1+2x}{x-1}$.

Si $x<1$, alors $\dfrac{-1+2x}{x-1} \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1+2x}{x-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1+2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-1+2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+2x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2 \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

On vérifie ces limites grâce à la calculatrice graphique.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = 2+\frac{\sin x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \ \text{(limite de référence)} \end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 3$.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

III.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a : $-x \leqslant \left(x^2+1\right) f(x) \leqslant x$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en détaillant toute la démarche.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \leqslant \left(x^2+1\right) f(x) \leqslant x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$

Les fonctions $x \mapsto -\dfrac{x}{x^2+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sont des fonctions rationnelles non nulles donc on peut appliquer la règle des monômes de plus haut degré.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

Attention, f n'est pas une fonction rationnelle ; on ne peut donc pas appliquer la propriété des monômes de plus haut degré.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

Quel est le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left]0\,;\pi\right[$?

Répondre en une phrase sans calculer la dérivée de f en utilisant le sens de variation de la fonction sinus sur I.

La fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Or $\forall x\in \mathrm{I}\quad f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ (autrement dit, f est l'inverse de la fonction sinus).

De plus, $\forall x\in \mathrm{I}\quad \sin x>0$.

Donc les variations de *f* sont contraires de celles de *f*.

Déterminer les limites de *f* aux bornes l'intervalle I c'est-à-dire en 0^+ et π^- en détaillant la démarche.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} \sin x=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pi^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$.

On vérifie les résultats grâce à la calculatrice graphique.

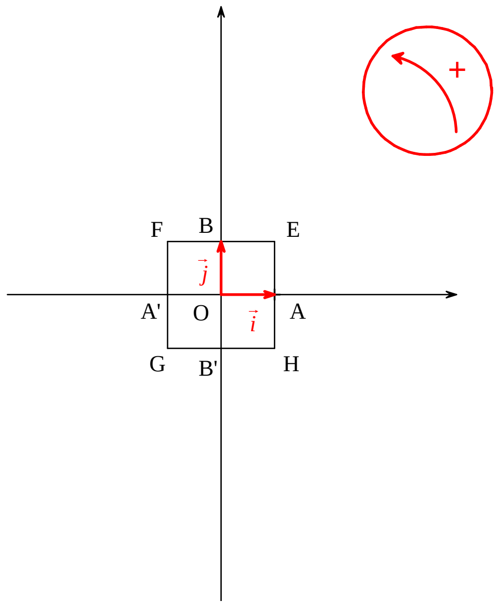
Dresser le tableau de variations de *f* sur I avec les limites déterminées précédemment.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Attention aux doubles barres essentielles.

VI.

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le carré EFGH avec $\mathrm{E}(1\,;1)$, $\mathrm{F}(-1\,;1)$, $\mathrm{G}(-1\,;-1)$, $\mathrm{H}(1\,;-1)$.



On munit la droite (AE) du repère $\left(\mathrm{A}, \vec{j}\right)$.

La droite (AE) muni de ce repère représente alors la droite des réels.

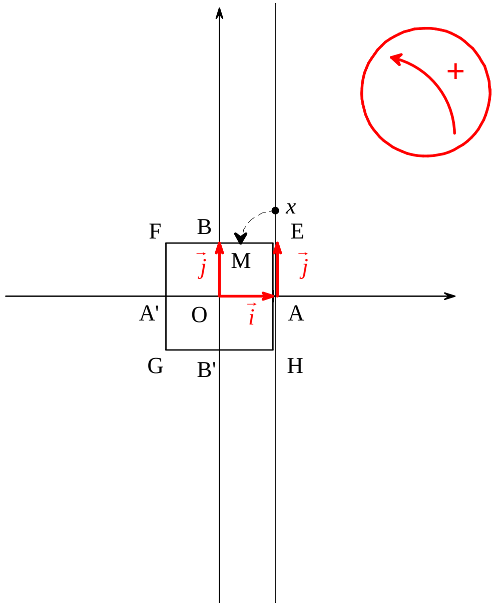
On enroule cette droite autour du carré EFGH comme un fil fixé en A autour d'une bobine de forme carrée.

On procède ainsi :

- la demi-droite [AE), qui correspond aux réels positifs, est enroulée dans le sens direct ;

- la demi-droite [AH), qui correspond aux réels négatifs, est enroulée dans le sens indirect.

Tout réel x vient alors s'appliquer sur un point image M situé sur le « bord » du carré EFGH.



Par exemple, le réel 1 vient s'appliquer en E, le réel 2 vient s'appliquer en B, le réel – 1 vient s'appliquer en H, le réel – 2 vient s'appliquer en B'.

Répondre aux questions sans justifier.

1°)

En quel point vient s'appliquer le réel 36 ? A'

En quel point vient s'appliquer le réel 2015 ? H

En quel point vient s'appliquer le réel – 24 ? A

Méthode :

On effectue des divisions euclidiennes par 8.

2°) Soit x et x' deux réels. On note M et M' leurs images respectives sur le carré.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et x' pour que M et M' soient confondus.

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}' \Leftrightarrow x = x' + 8k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}' \Leftrightarrow x \equiv x' \quad (\mathrm{mod}.8)$$