TS1

Contrôle du lundi 26 janvier 2015 (50 min)

Prénom : ……………………………….…… **Nom :** …………………………..…….

Note : …. / 20

I. (5 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 4-5\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Les trois questions sont indépendantes les uns des autres.

1°) Déterminer le maximum et le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$ sans calculer la dérivée et sans modifier l'expression de *f*.

2°) On note α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ (1).

3°) Linéariser $f(x)$. On se contentera d'écrire deux lignes de calculs.

II. (4 points)

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x+1}{(x-1)^2}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sin x}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^{n+1}+1}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\text{ fixé}\right)$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x-1}{\sqrt{x}}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

III. (4 points)

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$.

Compléter lorsque c'est possible les égalités suivantes (lorsque ce n'est pas possible, ne rien écrire) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \times g(x)] = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

IV. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - 3x$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$ en détaillant la démarche.

Aide à la rédaction pour les conclusions :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation …. pour asymptote horizontale en $+\infty$ ».

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation …. pour asymptote verticale ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 26-1-2015

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 4-5\sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Les trois questions sont indépendantes les uns des autres.

1°) Déterminer le maximum et le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$ sans calculer la dérivée et sans modifier l'expression de *f*.

On procède par inégalités successives.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -5 \leqslant -5\sin^2 x \leqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant 4-5\sin^2 x \leqslant 4$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 4$

On a démontré que *f* est bornée par – 1 et 4.

La borne – 1 est atteinte en tout réel x tel que $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1$. C'est donc le minimum de *f* sur $\mathbb{R}$.

La borne 4 est atteinte en tout réel x tel que $\sin x = 0$. C'est donc le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$.

2°) On note α le réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin\alpha \\ \text{ou} \\ \sin x = \sin(-\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k''\pi & (k'' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha + 2k'''\pi & (k''' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k''\pi,\ k'' \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \alpha + 2k'''\pi,\ k''' \in \mathbb{Z}\}$$

3°) Linéariser $f(x)$. On se contentera d'écrire deux lignes de calculs.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4 - 5 \times \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{3+5\cos 2x}{2}$$

II.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{5x+1}{(x-1)^2}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1}(5x+1) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim_{x\to 1}\frac{5x+1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sin x}$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^{n+1}+1}$ $\left(n \in \mathbb{N}^* \text{ fixé}\right)$. On détaillera la démarche en utilisant la présentation habituelle.

On utilise la règle des monômes de plus haut degré pour une fraction rationnelle.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^{n+1}+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^n}{x^{n+1}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

4°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (2x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice graphique.

III.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$.

Compléter lorsque c'est possible les égalités suivantes (lorsque ce n'est pas possible, ne rien écrire) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + g(x)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) \times g(x)\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - 3x$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

Attention, f n'est pas une fonction polynôme (à cause de $\sqrt{x}$ qui n'est pas une puissance de x d'exposant entier naturel).

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \sqrt{x}\left(1 - 3\sqrt{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 3\sqrt{x}\right) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$ en détaillant la démarche.

Aide à la rédaction pour les conclusions :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation …. pour asymptote horizontale en $+\infty$ ».

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation …. pour asymptote verticale ».

Certains élèves ont commencé par dériver f puis on dressé le tableau de variations de f.
Cela n'était pas demandé et ne servait à rien.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2-x) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (2-x) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient, } \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty.$$

D'après ces deux limites, la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

On utilise la règle des monômes de plus haut degré pour une fraction rationnelle.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{-x} \right) = \lim_{x \to -\infty} (-1) = -1$$

D’après ces deux limites, $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d’équation $y = -1$ pour asymptote horizontale en + ∞.

On vérifie les résultats grâce à la calculatrice graphique.