1ère S

Approche expérimentale de la tangente à une courbe

Plan

Introduction :

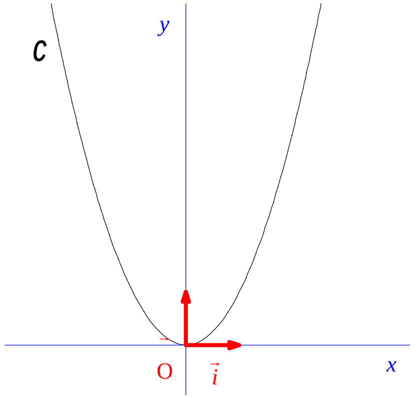
On rappelle la définition de la tangente à un cercle :

La tangente en un point à un cercle est la droite passant par le point et perpendiculaire au rayon.

Partie 1

Manipulations

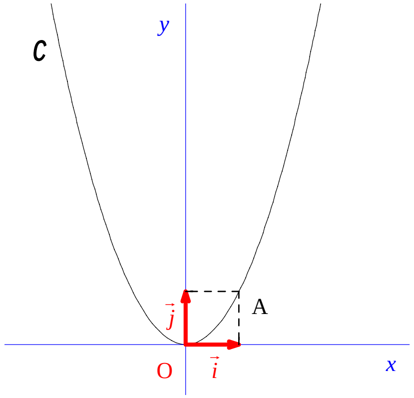
Dans toute cette partie, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction « carré » dans le plan muni d'un repère.



Nous considérons le point A(1 ; 1) de $\mathcal{C}$.
Nous cherchons à tracer la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Il s'agit d'une droite.

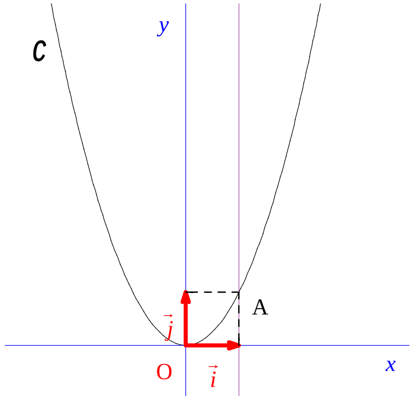
Il convient de noter que l'étude qui est faite en A pourrait être faite de la même manière pour tout autre point de la courbe $\mathcal{C}$.



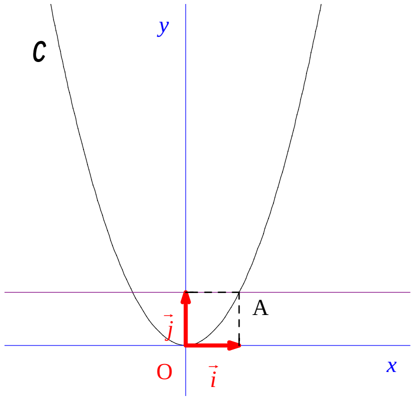
I. Tracé « à la main »

On utilise la règle non graduée.

On peut d'emblée exclure certains tracés qui ne correspondent pas à l'idée intuitive que l'on se fait d'une tangente.



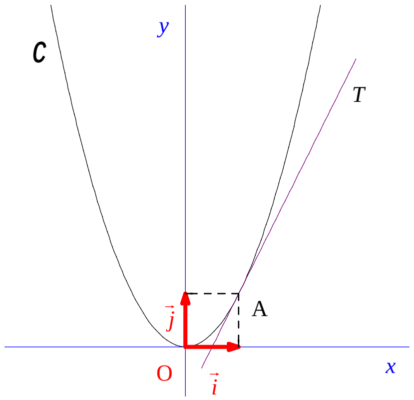
La droite coupe la courbe en un seul point mais n'est pas tangente.



La droite n'est manifestement pas tangente à la courbe.

Aucun de ces deux tracés ne convient.

On prend la règle et on la fait tourner autour du point A. On fait en sorte que l'un de bords de la règle soit « collée » à la courbe le plus possible.



Le geste que l'on fait avec la règle est important.

→ **Il s'agit d'un tracé approximatif.**

On peut tracer approximativement une droite passant par A qui semble tangente à $\mathcal{C}$.
Cette démarche n'est pas rigoureuse.

II. Tracé sur calculatrice

• Modèle TI :

On commence par tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{prgm}}$ 5 : (tangente) $\boxed{\text{entrer}}$ 1

abscisse du point en lequel on désire tracer la tangente

L'équation réduite de la tangente s'affiche au bas l'écran.

• Modèle Casio

Voir livre Indice édition 2011 p. 355 (tangente à une courbe)

III. Tracé à l'aide d'une logiciel de tracé de courbe

Les logiciels de tracés de courbes possèdent une commande permettant de tracer la tangente en un point.
Dans ce chapitre, nous allons travailler avec *Geogebra*.

Nous allons détailler la procédure pour *Geogebra*.

On commence par tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$.
On « crée » le point A de la courbe d'abscisse 1.
On définit la tangente en A à la courbe en tapant Tangente[A, f].
L'équation réduite s'affiche.

Partie 2

Les idées de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665)

L'idée de Fermat : « les droites qui tournent » ; mise en œuvre d'une démarche dynamique

Nous allons décrire dans ce chapitre une démarche originale et un peu déroutante de prime abord, due à Fermat.

I. Principe

Nous reprenons la situation de la fonction « carré » étudiée dans la **partie 1**.

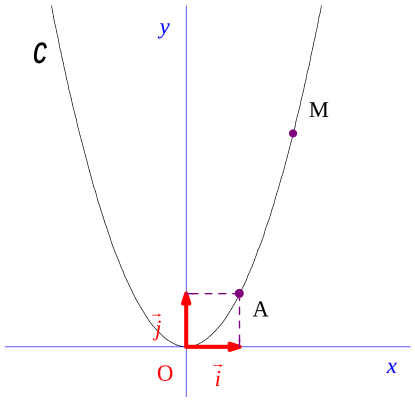
On s'intéresse à la tangente à $\mathcal{C}$ en un point A.

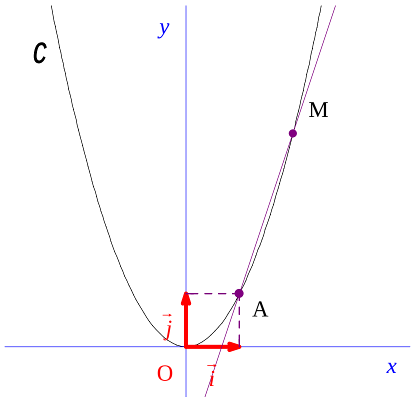
① 1ère idée : « créer » un point $M \neq A$.

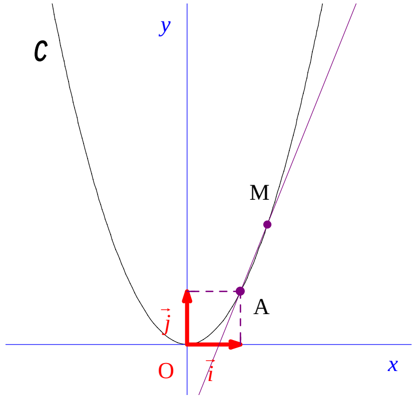
② 2e idée : considérer la droite (AM).

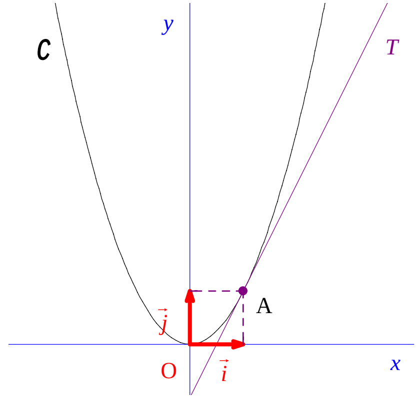
③ 3e idée : bouger le point M (M mobile, dynamique).

④ 4e idée : faire se rapprocher M de A et observer une position limite.









► Il est important de retenir le concept de « droite mobile ».

► Cette idée est particulièrement intéressante car elle permet de mathématiser la situation comme nous allons le voir dans les chapitres suivants.

► La mise en œuvre de cette idée peut se faire « à la main » (avec une règle non graduée que l'on fait « tourner » autour du point A) mais est beaucoup facilitée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

On retiendra essentiellement de ce paragraphe la démarche avec la règle qui permet de faire « apparaître » la tangente sur le graphique.

II. Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

Nous allons travailler avec *Geogebra*.

On définit f puis le point A.

On crée ensuite un point M quelconque sur $\mathcal{C}$ « à proximité » de A.

On définit la droite (AM).

Le point A est fixe.

On fait ensuite « bouger » le point M.

On rapproche le point M de A et l'on observe ce qui se passe pour la droite (AM).

Lorsque M se rapproche de A, la droite (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.

► Il est important de savoir refaire la démarche et de savoir refaire dans sa tête (« expérience de pensée »).

III. Généralisation

L'idée de Fermat est généralisable à d'autres courbes représentatives de fonctions (autres que la fonction carré).
C'est cette idée qui va permettre une mathématisation dans le chapitre suivant.

Nous allons donner une « définition » provisoire de la tangente.

On considère une fonction f et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Soit A un point fixé de $\mathcal{C}$.

Soit M un point mobile de $\mathcal{C}$ distinct de A.

Dans les cas que nous allons étudier, lorsque M se rapproche de A, la droite (AM) se rapproche d'une droite fixe T.
Cette droite est appelée T est appelée la **tangente** à $\mathcal{C}$ au point A (ou tangente en A à $\mathcal{C}$).

Partie 3

Comportement local de la courbe d'une fonction

I. Observations à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes

Nous reprenons la situation de la fonction « carré » prise comme modèle d'étude tout au long du chapitre.

Nous allons observer ce qui se passe au voisinage du point A.
Pour cela, nous effectuons des « zooms » successifs.

Nous observons que :

- la courbe $\mathcal{C}$ est quasiment rectiligne au voisinage du point A ;

- la courbe $\mathcal{C}$ est très proche de la tangente T et même quasiment confondue avec T au voisinage du point A.

Il serait cependant faux de croire que la courbe $\mathcal{C}$ est confondue avec la tangente au voisinage du point A.

On peut en effet démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente n'ont que le point A en commun.

Autrement dit il n'y a pas de « zone de contact » au voisinage du point A contrairement à ce qu'on pourrait croire.

Le point A est appelé **point de contact** ou **point de tangence** de la droite T avec $\mathcal{C}$.

II. Une autre « définition » possible de la tangente

À l'aide de l'observation précédente, nous pouvons donner une autre définition de la tangente.

On considère une fonction f et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

On note A un point de $\mathcal{C}$.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite passant par A la plus proche de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point A.

Cette définition ne sera pas utilisée cette année mais il est bon de l'avoir en tête.

Une utilisation est cependant donnée dans le paragraphe suivant.

III. Utilisation de la tangente

Il découle de la définition du paragraphe **II** que la courbe $\mathcal{C}$ épouse la forme de T au voisinage du point A.

Nous verrons plus tard que cela est intéressant à savoir lorsque l'on veut effectuer le tracé « à la main » de la courbe représentative d'une fonction (cela montre en outre l'utilisation des tangentes à une courbe qui n'est pas évident à percevoir de prime abord). Les tangentes permettent d'obtenir un tracé plus précis d'une courbe que si on ne les avait pas. Si on trace quelques tangentes, on obtient un tracé assez précis de la courbe.

À la question « À quoi servent exactement les tangentes en mathématiques ? », des réponses plus précises seront données dans les chapitres suivants.

À quoi servent les tangentes ?

Tangentes → changement de progression, changement de variations de la courbe (devient décroissante ou croissante)

Appendices

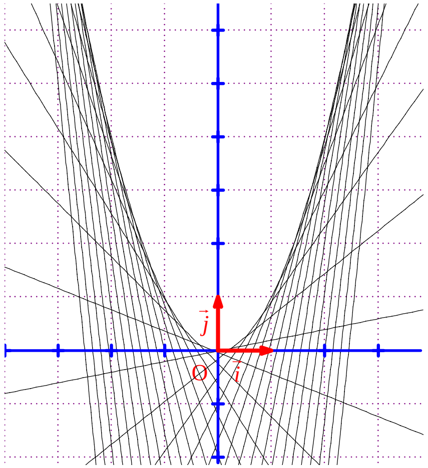
Appendice 1 : ensemble des tangentes à la courbe de la fonction « carré »

On déplace le point A sur la courbe et l'on se place en mode « trace activée ».

On « efface » ensuite la courbe.

La courbe apparaît comme « l'enveloppe » de ses tangentes.

On voit qu'il est possible de reconstituer la courbe à partir de ses tangentes.



Cela marche pour la courbe représentative de la fonction « carré » mais pas pour la courbe représentative de la fonction « cube ». Pour la courbe représentative de la fonction « cube », il faudrait tracer les tangentes que pour la partie des $x \geqslant 0$ ou pour la partie des $x \leqslant 0$ (cela tient au fait que la courbe représentative de la fonction « cube » présente un changement de concavité en l'origine).

Appendice 2 : origine du mot « tangente »

Le mot tangente vient de tangere en latin qui signifie « toucher ».

On peut citer les adjectifs « tangible », « tactile » qui ont la même étymologie.

Au XVII^{e} siècle, on ne parlait pas de tangente mais de **« touchante »**.

Attention d'ailleurs à l'orthographe du mot « tangente ». Une faute d'orthographe classique consiste à écrire « tangeante ».

Résumé du cours sur approche expérimentale de la tangente

1. Approche dynamique

Notion de point fixe ; point mobile (point dynamique)

Droite fixe ; droite mobile

► La tangente est la position limite des sécantes.

Il est possible de tracer approximativement « à la main » la tangente à une courbe (c'est ce qu'on fait en physique).
On considère une fonction *f* et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

2. Allure locale

► La tangente est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point.

Il est possible de tracer la tangente à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe ou d'une calculatrice graphique.