Propositions quantifiées

La notion de quantification est une notion fondamentale, essentielle dans la formation d'énoncés mathématiques.

Le chapitre s'organise selon deux axes :

- le langage ;

- le raisonnement.

Le chapitre se propose de répondre aux questions suivantes :

- Qu'est-ce quantifier ?

- Pourquoi quantifier ?

- Quand et comment quantifier ?

Plan du chapitre

I. Différents types de propositions

Nous allons considérer les phrases suivantes qui se situent dans divers cadres (algébrique, géométrique…).

P_1 : Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent 60°.
P_2 : Le carré d'un réel est toujours positif ou nul.
P_3 : La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.
P_4 : Il y a un réel qui est égal à son carré.
P_5 : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.
P_6 : Dans une équation produit nul, un des facteurs est forcément égal à 0.
P_7 : Certains réels ont une partie décimale égale à 0.
P_8 : Tout réel admet un inverse.
P_9 : Un diamètre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est l'hypoténuse.
P_{10} : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
P_{11} : Il existe un réel dont le carré est égal à – 1.

Chacune de ces phrases est une proposition, c'est-à-dire que chacune d'elles possède une valeur de vérité, vraie ou fausse. Lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

Toutes sont vraies sauf les phrases P_8 et P_{11}. En effet, 0 n'a pas d'inverse et le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif.

Du point de vue du sens, ces phrases se classent dans deux catégories : les phrases P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, P_8, P_9, P_{10} expriment une généralité, tandis que les phrases P_4, P_7 et P_{11} expriment une particularité.

Toutes les phrases de la première catégorie peuvent être reformulées par une phrase commençant par un « pour tout ».
Toutes les phrases de la deuxième catégorie peuvent être reformulées par une phrase commençant par un « il existe ».
On dit qu'il s'agit de phrases quantifiées. Les phrases de la première catégorie sont quantifiées de manière universelle. Celles de la deuxième catégorie sont quantifiées de manière existentielle.

On notera que la quantification d'une proposition peut s'exprimer en français de diverses manières.

La quantification universelle est marquée par les mots ou locutions « tout », « toujours », « jamais », « un », « quelque soit », « aucun », ...

La quantification existentielle est marquée les mots ou locutions « certains », « existe », « il y a », ...

Ces mots ou locutions apparaissent à un endroit de la phrase (début, milieu, fin).

Au niveau du lycée, on exprimera la quantification de manière assez systématique en employant les expressions « pour tout » (ou « quel que soit ») pour la quantification universelle et « il existe » pour la quantification existentielle, en général en début de phrase.
Les phrases quantifiées sont ainsi données sous une forme stéréotypée qui permet de reconnaître immédiatement de quel type de quantification il s'agit (universelle ou existentielle).

On peut d'ores et déjà noter que la quantification universelle ou existentielle n'apparaît par forcément de manière claire.

C’est le cas de la phrase P_{10} que nous avons classée parmi les propositions quantifiées universellement. Pourtant, on remarque une absence totale de mots justifiant ce classement. Ici, nos connaissances nous permettent de savoir qu’il s’agit d’une égalité vraie pour tous les réels (identité remarquable).
Il s’agit d’une quantification cachée ou implicite ; nous y reviendrons plus loin. On évitera à tout prix ce type d’ambiguïté. Par exemple, une égalité telle que $x^2 = 1$, sans autre renseignement sur *x*, pose des problèmes d’interprétation : *x* est-il un réel ? un entier ? Cette égalité est-elle vraie pour tous les réels ou un nombre limité de réels *x* ?

Au niveau du lycée, on privilégiera toujours une quantification claire.

Nous pouvons voir dans ces exemples que l’on rencontre des propositions quantifiées dans tous les domaines des mathématiques (algèbre, géométrie, analyse).
On retrouve des propositions quantifiés dans divers cadres : cadre algébrique, géométrique…

II. Quantification et énoncés mathématiques

Comme nous l’avons vu dans les exemples du **I**, on rencontre des propositions quantifiées dans tous les domaines des mathématiques (algèbre, géométrie, analyse…).

La quantification joue un rôle de première importance dans les énoncés de propriétés :

→ au collège (où elle n’est pas souvent explicite) ;

→ au lycée (où elle est le plus souvent explicite).

Voici deux propriétés données en 3e

• Considérons la propriété suivante (identité remarquable) :

« Pour tous réels *a* et *b*, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. »

On a une propriété générale, qui est bien quantifiée (« pour tous »).

On peut l’appliquer en prenant des exemples (des cas particuliers) c’est-à-dire des valeurs numériques pour *a* et *b*. C’est le principe de particularisation que nous avons évoqué dans le paraphe précédent.

Par exemple, si on prend $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$, on obtient l’égalité $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

• Considérons la propriété suivante :

« Pour tous réels *a* et *b* positifs ou nuls, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. »

On a une propriété générale bien quantifiée (« pour tous »).

On peut l’appliquer en prenant des exemples. Par exemple, si on prend $a = 2$ et $b = 3$, on obtient l’égalité $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$.

Nous reviendrons dans la suite du chapitre sur les propriétés du cours formulées « Si …, alors » qui sont des propositions quantifiées universellement (proposition conditionnelles).

III. Quelques généralités

1°) Qu'est-ce qu'une proposition quantifiée ?

On appelle **proposition quantifiée** une proposition de l'un des deux types suivants :

« Pour tout $x \in E \quad p(x)$ » ou « Quel que soit $x \in E \quad p(x)$ »

« Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ »

où E est un ensemble et $p(x)$ une phrase qui dépend de x.

Dans le premier cas, l'expression « pour tout $x \in E$ » marque une **quantification universelle**.

Dans le deuxième cas, l'expression « il existe $x \in E$ tel que … » marque une **quantification existentielle**.

Il s'agit de deux propositions c'est-à-dire qu'il s'agit d'énoncés mathématiques qui possèdent une valeur de vérité.

La proposition « Pour tout $x \in E \quad p(x)$ » est vraie lorsque pour tous les éléments x de E, sans exception, $p(x)$ est vraie.
Elle est fausse dans le cas contraire c'est-à-dire s'il existe au moins un élément x de E tel que $p(x)$ soit fausse.

La proposition « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ » est vraie lorsque pour au moins un élément x de E, $p(x)$ est vraie.
Elle est fausse dans le cas contraire c'est-à-dire si pour tous les éléments x de E $p(x)$ est fausse.

2°) Signification du « Il existe un … »

L'expression « Il existe un … tel que … » signifie en fait « Il existe au moins un … tel que … ».
Le mot « un » ne signifie pas ici « exactement un ».
On écrira parfois « Il existe au moins un … » mais pas toujours. Il faudra alors veiller à interpréter correctement le « un » en « au moins un » selon la convention qui a été dite.

Lorsque l'on veut préciser qu'il en existe un seul, on écrit « Il existe un unique … » ou « Il existe un, et un seul,… ». Nous y reviendrons plus loin.

3°) Vocabulaire

● L'ensemble E est appelé le **référentiel**.
Le référentiel joue un grand rôle dans les deux types de propositions quantifiées comme nous le verrons dans la suite.

● La lettre x est appelée la **variable**. Il s'agit d'une variable muette c'est-à-dire qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre non utilisée ailleurs.

4°) Importance du référentiel

a) Exemples

La proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$ » (le référentiel est $\mathbb{R}$) est fausse mais la proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = x$ » (le référentiel est $\mathbb{R}_+$) est vraie.

La proposition « Il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $x+3=0$ » (le référentiel est $\mathbb{N}$) est fausse mais la proposition « Il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x+3=0$ » (le référentiel est $\mathbb{Z}$) est vraie.

Il sert entre autre à préciser le contexte.

b) Exemple

La proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$ » est vraie.
Dans cette proposition, la quantification universelle indique que l'égalité est vraie pour tous les réels x de $\mathbb{R}^*$.
$\mathbb{R}^*$ est le référentiel.

Cas d'un ensemble privé de quelque chose. Universel par rapport au référentiel.

Nous reverrons dans la suite du cours l'intérêt et l'importance du référentiel dans une proposition quantifiée.

4°) Lien entre les deux types de phrases quantifiées

• Valeur de vérité ; lien entre universel et existentiel

Si une proposition quantifiée niversellement est vraie, elle est aussi vraie de manière existentielle.
La réciproque est fausse ; nous y reviendrons ultérieurement.

Si la proposition « Pour tout $x \in E$ $p(x)$ » est vraie, alors la proposition « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ » est également vraie (à partir du moment où E est non vide, ce qui sera supposé dans tout le chapitre).

Si la proposition « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ » est fausse, alors la proposition « Pour tout $x \in E$ $p(x)$ » est également fausse.

• Principe de particularisation (ou de spécialisation)

Lorsqu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, on peut l'appliquer pour des éléments particuliers de cet ensemble.
Ce principe est appliqué systématiquement sans que l'on en ait conscience lorsque l'on a applique des propriétés. Nous y reviendrons un peu plus loin.

5°) Intérêt de la quantification

Exemple :

Si l'on écrit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on ne sait pas si cette égalité est vraie pour tous les réels a et b ou pour seulement quelques réels a et b.
Le fait de rajouter « pour tous réels a et b » permet de donner un sens à l'égalité et de préciser son domaine de validité.

IV. Négation d'une proposition quantifiée

1°) Propriété (admise sans démonstration)

E est un ensemble et $p(x)$ une phrase qui dépend de x.

- La négation d'une phrase du type « Pour tout $x \in E$ $p(x)$ » est « Il existe $x \in E$ tel que non $p(x)$ ».

- La négation d'une phrase du type « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ » est « Pour tout $x \in E$ non $p(x)$ ».

On peut retenir la propriété sous la forme :

- La négation d'un « Il existe… » est « Pour tout … ».

- La négation d'un « Pour tout … » est « Il existe… ».

2°) Commentaires

- Cette propriété montre le lien entre quantificateur universel et quantificateur existentiel.

- Il faut noter que la négation de « Il existe » n'est pas « Il n'existe pas ».

3°) Mise en garde

Attention, on peut trouver – et cela est tout à fait légitime – que ça n'est pas naturel.
Nous le prenons comme une convention, bien que cela puisse se démontrer dans le cadre de la logique formelle (ce qui ne sera pas fait ici, car hors programme).

En effet, cela échappe à la logique naturelle ou intuitive (cf. différence entre négation en logique et contraire).

Exemple :

La négation de « Toutes les boules sont rouges » est « Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge » et non « Toutes les boules ne sont pas rouges ».

V. Utilisation de symboles

1°) Introduction

Pour écrire plus commodément des phrases quantifiées, les mathématiciens ont inventé deux symboles : $\forall$ (quel que soit) et $\exists$ (il existe).
Ces symboles sont appelés des **quantificateurs**.

2°) Utilisation

E désigne un ensemble et $p(x)$ désigne une phrase portant sur un élément x de E.

• La proposition « Pour tout $x \in E \quad p(x)$ » s'écrit « $\forall x \in E \quad p(x)$ ».

• La proposition « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ » s'écrit « $\exists x \in E$ tel que $p(x)$ ».

Dans ces écritures, la variable x apparaît liée au quantificateur.

3°) Exemples

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2} = x$

$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 2$

4°) Intérêt

• gain de place, concision
• clarté
• précise souvent un ensemble de validité (c'est-à-dire le référentiel E). Nous y reviendrons dans la suite.

Attention il s'agit bien de symboles et non d'abréviations. Nous y reviendrons dans la suite.

5°) Utilisation du quantificateur universel

Il sert à donner du sens.

6°) Importance du référentiel

Voici deux énoncés très proches.

$\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{a^2} = a$	Le « domaine de validité » de ces deux égalités $\mathbb{R}_+$.

Dans le second cas, $\sqrt{a^2}$ existe même lorsque a est négatif.

La quantification sert à préciser le domaine…

Condition de validité
Condition d'existence
Condition d'application (champ d'application)

7°) Comparaison de la quantification en français et de l'écriture symbolique

En français	En écriture symbolique
Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$. On a $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x. On a $x^2 \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.	$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$
Il existe un réel x tel que $x^2 = 4$.	$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 4$

Attention, un quantificateur n'est pas une abréviation.
L'utilisation des quantificateurs est régie par des règles strictes.
Un quantificateur s'utilise toujours avant une égalité ou une inégalité.
Il n'y a pas de français intercalé entre le quantificateur et ce qui suit (sauf le « tel que » que l'on s'autorise d'ajouter). Il n'y a pas de ponctuation non plus.
On a le droit d'utiliser ces symboles dans la rédaction mathématique à condition de respecter leurs règles d'utilisation.

7°) Retour sur la quantification existentielle

On a dit que le mot « un » signifie « au moins un » et non « exactement un ».
Il arrive cependant que l'on veuille signifier qu'il existe un unique élément. On a pour cela plusieurs moyens de l'exprimer.

Exemple :

En français, on écrira :
« Il existe un unique réel positif ou nul tel que $x^2 = 3$. »
« Il existe un et un seul réel x positif ou nul tel que $x^2 = 3$. »

En écriture symbolique, on écrira :
« $\exists! x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^2 = 3$. »

Le point d'exclamation placé après le quantificateur signifie « un unique ».

En mathématiques, le point d'exclamation est aussi utilisé pour désigner ce que l'on appelle la factorielle d'un entier naturel qui n'a rien à voir avec la logique.

VI. Quantification et démonstration (quantification et raisonnement)

1°) Deux méthodes à connaître

- Pour démontrer qu'une proposition du type « Quel que soit x appartenant à … » est vraie, on ne peut pas prendre d'exemples. Lorsque l'on a un ensemble infini de valeurs de x à envisager, on doit alors raisonner de manière générale (ne pas prendre de chiffres).

- Pour démontrer une proposition du type « Il existe un x appartenant à … tel que … » est vraie, on prend un exemple dans la plupart des cas de Seconde et de Première.

Pour démontrer qu'une proposition est fausse, on démontre que la négation est vraie.

Point-méthode :

Pour démontrer qu'une proposition existentielle est vraie, on utilise un **exemple**.
Pour démontrer qu'une proposition universelle est fausse, on utilise un **contre-exemple**.

2°) Exercice

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

P : « Pour tous réels a et b positifs ou nuls on a : $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. »

Q : « Il existe deux réels positifs ou nuls a et b tels que $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. »

Solution :

La proposition P est fausse. On prend un contre-exemple : $a=9$ et $b=16$.

La proposition Q est vraie. On prend un exemple : $a=1$, $b=0$.
D'autres exemples sont possibles ($a=0$ et $b=0$ ou $a=0$ et $b=1$).

3°) Conjecture d'un énoncé avec quantificateur universel

Exemple :

$$\mathrm{E}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \qquad (x\in\mathbb{R}^*)$$

Si on calcule E pour plusieurs valeurs de x, on constate que $E=4$.

On peut donc conjecturer que « $\forall x\in\mathbb{R}^* \quad \mathrm{E}=4$ ».
Seul un calcul littéral permet de valider cette conjecture.

En général, il faut cependant être extrêmement prudent pour conjecturer qu'une proposition avec quantificateur universel est vraie en utilisant uniquement les résultats pour quelques valeurs.

De grands mathématiciens ont commis des erreurs importantes !

Un exemple célèbre : « n^2+n+41 est premier pour tout entier naturel n ».
Cette proposition est fausse.

VII. Quantification d'une implication, propositions conditionnelles

1°) Définition

On appelle **proposition conditionnelle** une proposition du type

« Pour tout $x \in E$, si $p(x)$, alors $q(x)$. »

où E est une ensemble, $p(x)$ et $q(x)$ deux phrases portant sur un élément x de E.

Ce type de proposition s'écrit symboliquement sous la forme $\forall x \in E \ \left(p(x) \Rightarrow q(x) \right)$.
Il s'agit d'un type de phrase quantifiée extrêmement important (en particulier, pour la formulation de nombreux énoncés de propriétés).

2°) Exemples

① Considérons la proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 1$ ».

Cette proposition est vraie, l'ensemble $\mathbb{R}$ précise le contexte de cette proposition conditionnelle.

② Considérons la proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ ».
Cette proposition est fausse, comme le montre le contre-exemple $x = 0$.

3°) Absence de quantification

Il arrive assez fréquemment que l'on n'écrive pas la quantification universelle d'une proposition conditionnelle afin de ne pas alourdir l'écriture. Le référentiel (qui joue un rôle fondamental) est alors mentionné autrement.
Par exemple, si un énoncé demande la valeur de vérité de la proposition « Si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 1$ », l'énoncé aura préalablement dit que x appartient à $\mathbb{R}$ (ou à un autre ensemble de nombres), et il faudra interpréter cette proposition sous la forme « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant 1$, alors $x^2 \geqslant 1$ ».
Le référentiel sert ici à préciser le contexte de la proposition conditionnelle.

Comme nous l'avons dit, les propositions conditionnelles sont souvent quantifiées de manière implicite. C'est notamment le cas de très nombreux énoncés de propriétés formulés sous la forme courte « Si …, alors … ».
Le quantificateur universel sous-entendu ne doit pas poser de problèmes.
Il sera explicité seulement dans les cas où il est utile à la compréhension.
On retiendra que, dans de nombreux cas, pour ce type de proposition, la quantification n'est pas apparente. Elle est cachée (ou implicite) et il est important d'apprendre à repérer la quantification dans ce type de proposition.

4°) Propositions réciproques, contraposées

On considère une proposition conditionnelle directe « Pour tout $x \in E$, si $p(x)$, alors $q(x)$ ».

- On appelle **proposition réciproque** la proposition « Pour tout $x \in E$, si $q(x)$, alors $p(x)$ ».
- On appelle **proposition contraposée** la proposition « Pour tout $x \in E$, si non $q(x)$, alors $p(x)$ ».

Une proposition conditionnelle et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité.
Une proposition conditionnelle et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

5°) Négation d'une proposition conditionnelle

La négation de la proposition « Pour tout $x \in E$, si $p(x)$, alors $q(x)$ » est la proposition « Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ et non $q(x)$ ».

On se réfère pour cela à la propriété de négation d'une proposition avec quantificateur universel et à la négation d'une proposition du type « Si A, alors B ». La négation de « Si A, alors B » est la phrase « A et non B ».

On se sert de cela assez fréquemment, par exemple, pour démonter que la proposition conditionnelle « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ » est fausse, on a démontré que sa négation « Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant -1$ et $x^2 < 1$ » (en utilisant le contre-exemple $x = 0$).
C'est pourquoi il est si important de savoir repérer lorsqu'une quantification est sous-entendue pour une proposition conditionnelle.

On retrouve la difficulté entre « négation » et « contraire ».
Il faut se souvenir que la négation d'une phrase en « Si …, alors … » n'est pas en « Si …, alors … ».
Il faut se méfier de l'intuition : on rencontre ici des différences notables avec la logique intuitive (de la vie courante).
La négation d'une proposition est un énoncé précis.

VIII. Quantification d'une équivalence

1°) Lors de la résolution d'équations et d'inéquations par équivalences, l'ensemble de référence est assez souvent sous-entendu bien qu'il puisse avoir un grand rôle.

Exemple :

$x^2 = 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$

Il s'agit en fait d'une proposition quantifiée universellement dans laquelle l'ensemble de référence est $\mathbb{R}$.

L'équivalence est quantifiée $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1)$

2°) Importance de l'ensemble de référence

Ici encore le référentiel a une importance primordiale pour pouvoir dire si une équivalence est vraie ou fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^*$, l'équivalence $\dfrac{1}{x} \geqslant 1 \iff x \leqslant 1$ est fausse.

Dans $\mathbb{R}_+^*$, l'équivalence $\dfrac{1}{x} \geqslant 1 \iff x \leqslant 1$ est vraie.

IX. <u>Attentes</u>

1°) Apparition de la quantification dans le cursus d'un élève

Quantificateur universel :

Au collège, il apparaît de manière cachée (lorsque l'on donne un énoncé général), rarement dans des questions.

Au lycée, il apparaît de manière visible dans des énoncés de propriétés ainsi que dans des questions telles que « Démontrer que pour tout *x*... », type de question déroutant au début pour les élèves quand le quantificateur n'a pas été expliqué).

La quantification universelle est attendue des élèves à partir de la 1ère S.

Quantificateur existentiel :

Au collège, il n'apparaît quasiment jamais dans des énoncés, et très rarement dans des questions.

Au lycée, il apparaît parfois dans des énoncés et plus souvent dans des questions (à partir de la seconde).

2°) Utilisation du quantificateur universel par l'élève

À partir de la Première, il relève d'une initiative personnelle. Il s'agit d'une exigence de Première.
L'élève doit avoir le souci de la quantification (ce doit être un réflexe).
On attend que l'élève l'écrive en français ou de manière symbolique.
Il s'emploie principalement avant un calcul.
Son absence est considérée comme fautive ; on évite le plus possible la quantification implicite, on cherche quasiment toujours une quantification explicite.

Résumé :

Deux types de propositions quantifiées

2 quantificateurs différents :

- le **quantificateur universel** en français « pour tout… » ou « quel que soit… » ou en écriture symbolique $\forall$;

- le **quantificateur existentiel** en français « il existe » ou plus exactement « il existe un ... tel que … » ou en écriture symbolique $\exists$.

Le « un » signifie ici « au moins un » ; il ne signifie pas « exactement un ».
Une proposition du type « Il existe un élément *x* … tel que … » est déclarée vraie dès lors qu'il y a au moins un élément *x* pour lequel la proposition est vraie.

L'élève doit :
- comprendre le sens des quantificateurs
- comprendre l'utilité
- comprendre l'importance
- savoir utiliser les quantificateurs à bon escient (spécialement le quantificateur universel)

En début de Première, les énoncés comportent parfois la mention « On portera une grande attention à la quantification ». Ils donnent même parfois des exemples d'utilisation du quantificateur universel « quelque soit… ».

Appendice historique :

C'est le logicien Frege qui a introduits les quantificateurs en 1879, en tant qu'expression de logique : « Il existe » et « Tout » utilisés comme tels dans les raisonnements de logique. Mais c'est plus tard que d'autres logiciens, Peano en 1894 puis Gentzen en 1934 ont introduit ces curieux symboles à l'envers pour désigner ces magnifiques quantificateurs. Le "E" à l'envers est évidemment l'initiale de "Existence". Et le "A" à l'envers est l'initiale d'un mot de même sens que le mot "All" en anglais, qui signifie "Tout".

Wikipedia

La notation « $\forall$ » a été utilisée pour la première fois par Gerhard Gentzen en 1933 (publié en 1934). Le mot allemand "alle" signifiant "tout", il propose un "symbole (Zeichen) valant pour tout (für alle)". Gentzen indique qu'il a choisi comme « symbole pour tout » (All-Zeichen) le « A » renversé par analogie avec le symbole « $\exists$ » pour le quantificateur existentiel qu'il tient de Russell.

La notation $\exists$ a tout d'abord été employée par Giuseppe Peano en 1897 dans le volume II de son Formulaire de mathématiques avec une syntaxe différente. Bertrand Russell l'utilise le premier de la façon actuelle, comme un opérateur de liaison.

Extrait du programme :

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à :

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ∀, ∃ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles

Extrait du document ressource :

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :
♦ dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5e ;
♦ dans la présentation des identités remarquables.
En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.
Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.
Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes, la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.
Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

Exercices :

1 Dire si la proposition « Il existe un entier dont la somme des chiffres est égale à 13 » est vraie ou fausse.

2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Donner la négation de la proposition « Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$ ».