2^{e} Contrôle sur les coordonnées

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.

I.

Placer sur un graphique les points A(– 5 ; 3), B(– 4 ; – 1), C(1 ; – 4).

1°) Calculer les coordonnées du point E milieu de [AC].
2°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

II.

Placer sur un graphique les points A(3 ; 4), B(– 1 ; 7), C(– 1 ; 3).

1°) Calculer AB et AO. En déduire la nature du triangle AOB.
2°) Calculer AC. Le point A est-il situé sur le cercle de centre C de rayon 4 ?

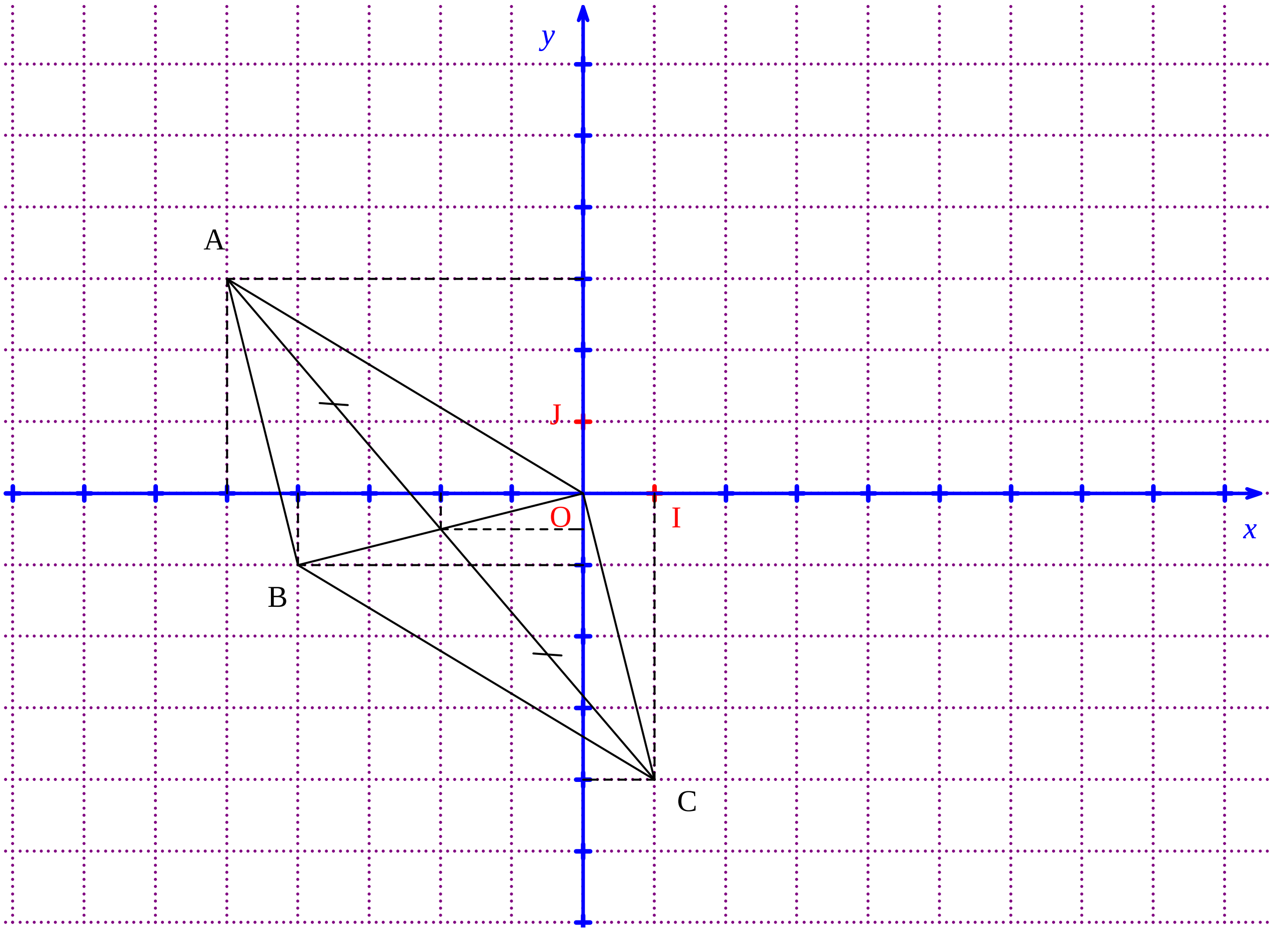
III.

Placer sur un graphique les points A(3 ; 5), B(– 3 ; 1), C(5 ; – 4,5).

1°) Calculer les distances AC et BC.
2°) En déduire la nature du triangle ABC
3°) Calculer les coordonnées du milieu E de [AB].
4°) On note D le symétrique de C par rapport à E.
Calculer les coordonnées du point D.
5°) Démontrer que le triangle EAC est un triangle rectangle en E.
6°) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Corrigé du contrôle

I. A(– 5 ; 3), B(– 4 ; – 1), C(1 ; – 4)



1°) Calcul des coordonnées du point E milieu de [AC].

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{-5+1}{2} \\ y_E = \dfrac{3-4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = -2 \\ y_E = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc E a pour coordonnées $\left(-2\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

2°) Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut et il suffit que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu E.

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

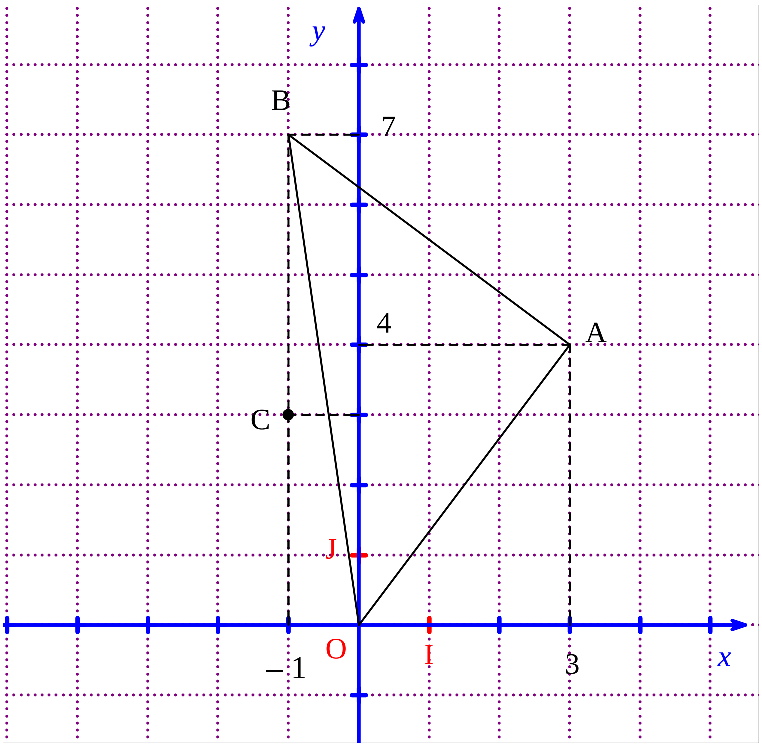
$$\begin{cases} -2 = \dfrac{-4 + x_D}{2} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{-1 + y_D}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = -4 + x_D \\ -1 = -1 + y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

Donc D a pour coordonnées (0 ; 0).
Le point D est donc confondu avec le point O.

II. A(3 ; 4) B(– 1 ; 7) C(– 1 ; 3)



1°)

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad \mathrm{AO} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2}$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (7-4)^2} \qquad \mathrm{AO} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2}$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{16+9} \qquad \mathrm{AO} = \sqrt{9+16}$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{25} \qquad \mathrm{AO} = \sqrt{25}$$

$$\mathrm{AB} = 5 \qquad \mathrm{AO} = 5$$

Donc $\mathrm{AO} = \mathrm{AB}$ donc AOB est isocèle en A.

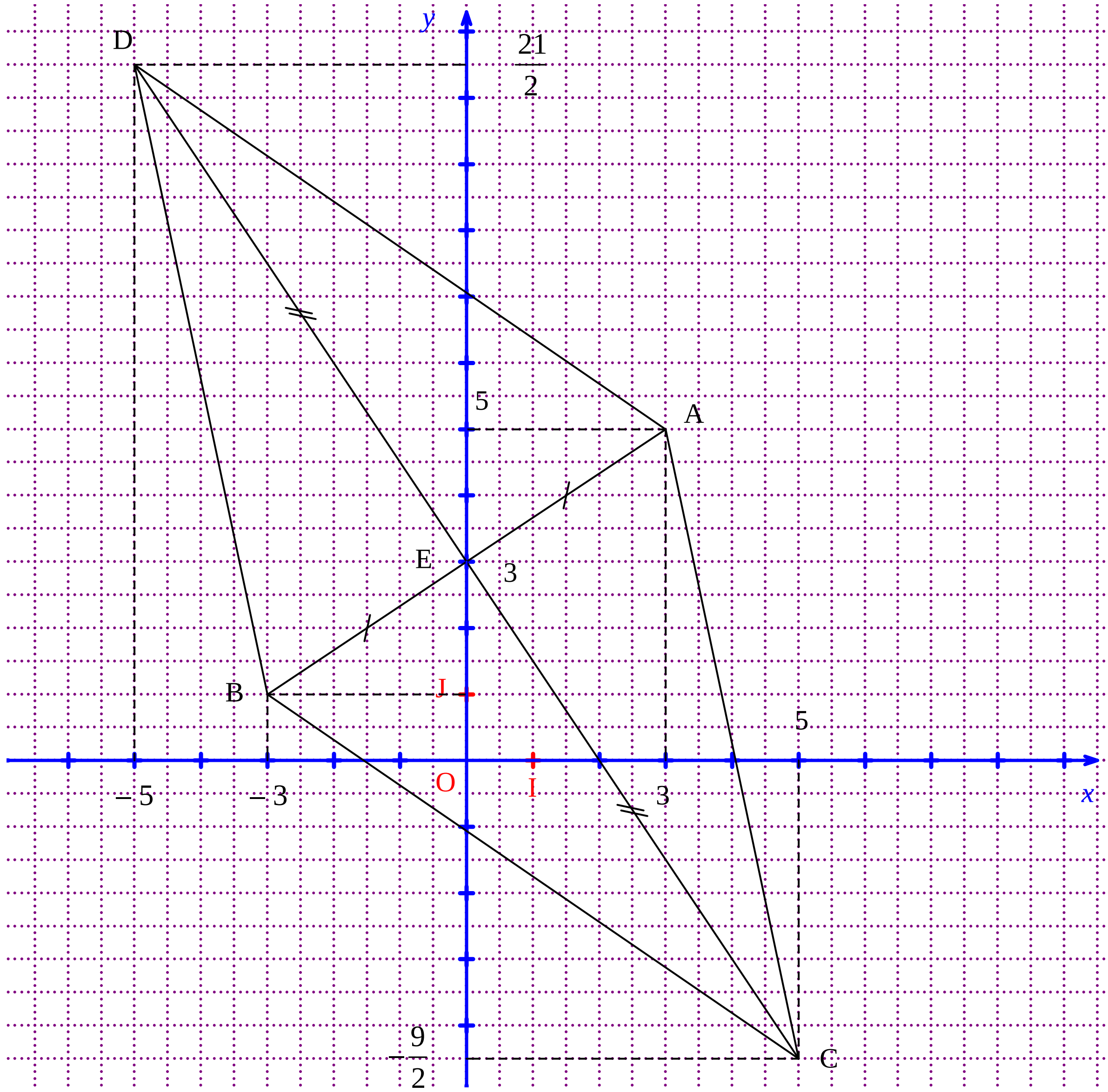
2°)

Calcul de AC

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$
$$AC=\sqrt{(-1-3)^2+(3-4)^2}$$
$$AC=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$
$$AC=\sqrt{16+1}$$
$$AC=\sqrt{17}$$

$AC \neq 4$ donc le point A n'est pas situé sur le cercle de centre C et de rayon 4.

III.



1°)

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(-3-5)^2+\left(1-\left(-\frac{9}{2}\right)\right)^2} \qquad \mathrm{AC}=\sqrt{(3-5)^2+\left(5-\left(-\frac{9}{2}\right)\right)^2}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{8^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2} \qquad \mathrm{AC}=\sqrt{(3-5)^2+\left(\frac{19}{2}\right)^2}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{64+\frac{121}{4}} \qquad \mathrm{AC}=\sqrt{4+\frac{361}{4}}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\frac{377}{4}} \qquad \mathrm{AC}=\sqrt{\frac{377}{4}}$$

2°) On a : $\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$ donc ABC est isocèle en C

3°) Calculons les coordonnées du milieu E de [AB].

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2} \\ y_{\mathrm{E}}=\dfrac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}=\dfrac{3-3}{2} \\ y_{\mathrm{E}}=\dfrac{1+5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}=0 \\ y_{\mathrm{E}}=3 \end{cases}$$

E a pour coordonnées (0 ; 3).

4°) D est le symétrique de C par rapport à E donc E est le milieu de [CD] donc :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{E}}=\dfrac{x_{\mathrm{C}}+x_{\mathrm{D}}}{2} \\ y_{\mathrm{E}}=\dfrac{y_{\mathrm{C}}+y_{\mathrm{D}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=\dfrac{5+x_{\mathrm{D}}}{2} \\ 3=\dfrac{-\frac{9}{2}+y_{\mathrm{D}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{5 + x_D}{2} \\ 6 = -\dfrac{9}{2} + y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = \dfrac{21}{2} \end{cases}$$

Donc D a pour coordonnées $\left(5\,;\dfrac{21}{2}\right)$.

5°) **Démontrons que EAC est un triangle rectangle en E.**

Calcul de AE^2 :

$$AE^2 = (3-0)^2 + (3-5)^2$$
$$AE^2 = 9 + 4$$
$$AE^2 = 13$$

Calcul de EC^2 :

$$EC^2 = (0-5)^2 + \left(3 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right)^2$$
$$EC^2 = (0-5)^2 + \left(3 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right)^2$$
$$EC^2 = (-5)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2$$
$$EC^2 = 25 + \frac{225}{4}$$
$$EC^2 = \frac{325}{4}$$

Or $AC^2 = \dfrac{377}{4}$.

On a : $AE^2 + EC^2 = 13 + \dfrac{325}{4} = \dfrac{52 + 325}{4} = \dfrac{377}{4}$.

Donc $AC^2 = EC^2 + AE^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, AEC est rectangle en E.

6°) Le triangle EAC est rectangle en E donc (EA) est perpendiculaire à (EC).
De plus, [AB] et [DC] ont le même milieu.
Donc ABCD est un losange.