TS1

Contrôle du mardi 23 septembre 2014 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………...………… **Note : ……..** **/ 20**

I. (1 point)

Calculer $z=\dfrac{\mathrm{i}^{15}\left(2-4\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)^2}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

$z=$ ………………………

II. (8 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe z (résolution au brouillon).

$\left(2z+1-\mathrm{i}\right)\left(\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}-2\right)=0$ (1) ; $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\mathrm{i}$ (2) ; $\left(1+\mathrm{i}z\right)^2+\left(1-\mathrm{i}z\right)^2=4$ (3) ; $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=2z$ (4).

$S_1=$ ………………………	$S_2=$ ………………………	$S_3=$ ………………………	$S_4=$ ………………………

III. (2 points)

Pour tout nombre complexe $z\neq 1$, on pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}\overline{z}}{z-1}$.

Entourer l'expression qui est égale à $\overline{Z}$.

$\dfrac{\mathrm{i}z}{\overline{z}-1}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{1-\overline{z}}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{\overline{z}+1}$

Justifier le choix par un calcul.

………...……

………...……

………...……

………...……

IV. (2 points)

On pose $z_1 = a + \mathrm{i}(a-1)$ et $z_2 = 3 - 2\mathrm{i}a$ où a est un réel. On pose également $Z = z_1 z_2$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de a.

Re Z = ...	Im Z = ...

Dans les exercices **V** et **VI**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

V. (1 point)

On donne les points A et B d'affixes respectives $1-\mathrm{i}$ et $2+3\mathrm{i}$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

………..……

VI. (6 points)

À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = (z-\mathrm{i})^2$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x' et y' sont deux réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$x' =$ .... et $y' =$ ....

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que M' appartienne à l'axe des imaginaires purs. On rédigera soigneusement à l'aide d'une chaîne d'équivalences.

………..……

………..……

………..……

………..……

………..……

Corrigé du contrôle du 23-9-2014

I.

Calculer $z=\dfrac{\mathrm{i}^{15}\left(2-4\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)^2}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

$$\boxed{z=2\mathrm{i}-1}$$

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe z (résolution au brouillon).

$\left(2z+1-\mathrm{i}\right)\left(\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}-2\right)=0$ (1) ; $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\mathrm{i}$ (2) ; $\left(1+\mathrm{i}z\right)^2+\left(1-\mathrm{i}z\right)^2=4$ (3) ; $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=2z$ (4).

$S_1=\left\{\dfrac{\mathrm{i}-1}{2}\,;\,2\mathrm{i}-1\right\}$	$S_2=\left\{-\mathrm{i}\right\}$	$S_3=\left\{\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}\right\}$	$S_4=\left\{1+\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\right\}$

● Résolution de (1) :

Il s'agit d'une équation produit nul.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2z+1-\mathrm{i}=0 \text{ ou } \mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}-2=0\\
&\Leftrightarrow 2z+1-\mathrm{i}=0 \text{ ou } \mathrm{i}\overline{z}=2-\mathrm{i}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\mathrm{i}-1}{2} \text{ ou } \overline{z}=\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\mathrm{i}-1}{2} \text{ ou } \overline{z}=\frac{2\mathrm{i}+1}{-1}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\mathrm{i}-1}{2} \text{ ou } \overline{z}=-2\mathrm{i}-1\\
&\Leftrightarrow z=\frac{\mathrm{i}-1}{2} \text{ ou } z=2\mathrm{i}-1
\end{aligned}$$

● Résolution de (2) :

On résout dans $\mathbb{C}\setminus\left\{-1\right\}$.

$$(2) \Leftrightarrow \overline{z}-1=\mathrm{i}\left(\overline{z}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}-\mathrm{i}\overline{z}=1+\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\mathrm{i}\right)\overline{z}=1+\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{-1+2\mathrm{i}+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{2\mathrm{i}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z=-\mathrm{i}$$

Autre méthode :
On peut aussi conjuguer l'égalité dès la $1^{\text{ère}}$ étape.

● Résolution de (3) :

$$(3) \Leftrightarrow 1+2\mathrm{i}z-z^2+1-2\mathrm{i}z-z^2=4$$

$$\Leftrightarrow 1\cancel{+2\mathrm{i}z}-z^2+1\cancel{-2\mathrm{i}z}-z^2=4$$

$$\Leftrightarrow 2-2z^2=4$$

$$\Leftrightarrow z^2=-1$$

$$\Leftrightarrow z=\mathrm{i} \text{ ou } z=-\mathrm{i}$$

● Résolution de (4) :

$$(4) \Leftrightarrow z^2+2=2z$$

$$\Leftrightarrow z^2-2z+2=0 \quad \text{(discriminant réduit donné par } \Delta'=-1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow z=1+\mathrm{i} \text{ ou } z=1-\mathrm{i}$$

III.

Pour tout nombre complexe $z\neq 1$, on pose $Z=\dfrac{\mathrm{i}\overline{z}}{z-1}$.

Entourer l'expression qui est égale à $\overline{Z}$.

$\dfrac{\mathrm{i}z}{\overline{z}-1}$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{1-\overline{z}}$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{\overline{z}+1}$

Justifier le choix par un calcul.

$$\overline{Z}=\overline{\left(\frac{\mathrm{i}\overline{z}}{z-1}\right)}=\frac{\overline{\mathrm{i}}\times\overline{\overline{z}}}{\overline{z}-\overline{1}}=\frac{-\mathrm{i}z}{\overline{z}-1}=\frac{\mathrm{i}z}{1-\overline{z}}$$

IV.

On pose $z_1 = a + \mathrm{i}(a-1)$ et $z_2 = 3 - 2\mathrm{i}a$ où a est un réel. On pose également $Z = z_1 z_2$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de a.

$\text{Re } Z = 2a^2 + a$	$\text{Im } Z = -2a^2 + 3a - 3$

Dans les exercices **V** et **VI**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

V.

On donne les points A et B d'affixes respectives $1 - \mathrm{i}$ et $2 + 3\mathrm{i}$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 2 + 3\mathrm{i} - (1 - \mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$

VI.

À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = (z - \mathrm{i})^2$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x' et y' sont deux réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$$x' = x^2 - (y-1)^2 \qquad \text{et} \qquad y' = 2x(y-1)$$

Voici comment on trouve ces résultats :

$$z' = (z - \mathrm{i})^2$$

$$= \left[x + \mathrm{i}(y-1)\right]^2$$

$$= x^2 - (y-1)^2 + 2\mathrm{i}x(y-1)$$

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que M' appartienne à l'axe des imaginaires purs. On rédigera soigneusement à l'aide d'une chaîne d'équivalences.

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\text{M} \in E \Leftrightarrow \text{M}' \in (\text{O}y)$$

$$\Leftrightarrow z' \in \text{i}\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}\, z' = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x-(y-1)][x+(y-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \text{ ou } x+y-1=0 \quad \text{(1}^{\text{ère}}\text{ possibilité)}$$

$$\Leftrightarrow y = x+1 \text{ ou } y = -x+1 \quad \text{(2}^{\text{e}}\text{ possibilité)}$$

E est la réunion des droites d'équations cartésiennes $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ (1$^{\text{ère}}$ possibilité).

E est la réunion des droites d'équations $y=x+1$ et $y=-x+1$ (2$^{\text{e}}$ possibilité).

On peut aussi écrire :

$E = D_1 \cup D_2$ où D_1 et D_2 les droites d'équations cartésiennes respectives $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$.