Exercices sur sommes et produits

1 Calculer $\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|\,p-q\,|$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

2 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose : $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Démontrer que $P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}$; en déduire une expression simplifiée de P_n.

3 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose : $P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1°) Démontrer que $P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.

2°) Pour tout entier naturel k, on pose $u_k=k^2-k+1$.

Calculer u_{k+1}.

3°) En déduire une expression simplifiée de P_n.

4 Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n.

5 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1°) Simplifier l'expression de P_n.

2°) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

6 Calculer pour tout entier naturel n la somme $S_n=\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}2^p$.

7 Une roue de loterie est divisée en 36 sections, chacune d'elles étant numérotée de 1 à 36 et ceci dans un ordre quelconque.
Démontrer que quel que soit l'ordre dans lesquels sont disposés les numéros il y a trois numéros consécutifs dont la somme est supérieure ou égale à 55.

8 1°) Vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

2°) En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

9 Démontrer que pour tout entier naturel k on a : $\frac{1}{2^{2^k}+1}=\frac{1}{2^{2^k}-1}-\frac{2}{2^{2^{k+1}}-1}$.

En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{2^{2^k}+1}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

10 Démontrer que $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{(n!)^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n}k!\right)^2}$ pour tout entier naturel n.

11 Un carré magique est un tableau carré de réels (c'est-à-dire avec le même nombre de lignes que de colonnes) tel qu'on obtienne le même résultat en additionnant les nombres qui se trouvent :
soit sur une même ligne, soit sur une même colonne, soit sur une même diagonale.
Cette somme commune s'appelle la somme magique s du carré.

Exemples :

① Voici un carré magique d'ordre 3 (3 lignes et 3 colonnes) formé par la suite des neuf premiers entiers naturels strictement positifs :

2	7	6
9	5	1
4	3	8

② Voici un carré magique d'ordre 4 (4 lignes et 4 colonnes) formé par la suite des seize premiers entiers naturels strictement positifs :

1	7	12	14
10	16	3	5
8	2	13	11
15	9	6	4

Démontrer que si un est un carré magique d'ordre n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, est formé par la suite des n^2 premiers entiers naturels non nuls, alors la somme magique s est $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Vérifier pour $n=3$ et $n=4$ avec les deux carrés magiques donnés en exemples.

12 Pour tout entier naturel k non nul, on pose $u_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$.

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de n et de u_n.

13 Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \times \cos \frac{1}{k+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

14 Calculer $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\ln k \times \ln(k+2)}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

15 Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de nombres réels.

Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij \cos(a_i - a_j) \geqslant 0$.

16 Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = 2^{(-1)^k k}$.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ où n est un entier naturel.

17 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel fixé non nul et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ où n est un entier naturel.

18 Soit x un réel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Déterminer une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1+x^{k+1}}{x^k}$.

19 Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(2k+1) = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$.

20 Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$ pour n entier naturel quelconque.

21 Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

22 Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(a_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ de réels strictement positifs.

Exprimer $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + a_j}$ en fonction de n.

23 Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(a_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ de réels.

1°) Écrire de deux façons différentes la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,\,j}$.

2°) Calculer cette somme lorsque $a_{i,\,j} = \frac{i^2}{2j+1}$ (donner le résultat sous forme factorisée).

24 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1°) Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

2°) Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)! + k! + (k+1)!}$.

25 Démontrer par récurrence que pour toute famille $(x_1\,;\,x_2\,;\ldots;\,x_n)$ de réels de l'intervalle $[0\,;1]$, où n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, on a $\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

25 voir exercice suivant

26 1°) On considère une famille $(x_1\,;\,x_2\,;\ldots;\,x_n)$ de réels de l'intervalle $[0\,;1]$, où n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$

2°) Déduire de la question 1°) c), l'encadrement suivant valable pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0\,;1]$, $1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}$.

3°) Déduire de la question 1°) c), l'inégalité suivante valable pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier naturel $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, $\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geqslant 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$.

27 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $\ln u_{n+1} = \ln u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

Exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de u_0 et de n.

28 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

29 1°) Démontrer que pour tout réel x on a $\frac{4x}{4x^4+1} = \frac{1}{(x-1)^2 + x^2} - \frac{1}{x^2 + (x+1)^2}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

30 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On pose $E = [\![0\,;n-1]\!]$ et $F = [\![1\,;n]\!]$. Soit f une fonction de E dans $\mathbb{C}$.

On pose $S = \sum_{(i,\,j)\in F^2} f\left(|\,i-j\,|\right)$.

1°) Démontrer que $S = n \times f(0) + 2(n-1)\,f(1) + ... + 2\,f(n-1)$.
2°) On prend $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Simplifier S.
3°) On prend $f = \exp$.
Simplifier S.

31 Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Soit $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_p)$ deux familles de réels. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exprimer $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} f(x_i + y_j)$ de manière plus simple dans chacun des cas suivants :

1°) $f = \exp$; 2°) $f = \cos$; 3°) $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

32 Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k + e^{k+1}}$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n.

33 Soit α un réel. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(e^k + e^{k+1}\right)^{\alpha}}$ (ou $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(e^k + e^{k+1}\right)^{\alpha}$).

Déterminer une expression simplifiée de S_n.

34 Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Exprimer $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (i-j)^2$ en fonction de n et p.

Pour $n = p$, retrouver le résultat à l'aide de l'exercice **30**.

Solutions

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|\ p-q\ |=\frac{n\left(n^2-1\right)}{3}$

$\boxed{7}$ Raisonnement par l'absurde.
On groupe les secteurs par paquets de 3. On calcule la somme de tous les secteurs.

$\boxed{12}$ $(n+1)u_n-n$

$\boxed{13}$ Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\times\cos\frac{1}{k+1}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\times\cos\frac{1}{k+1}}=\frac{\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\frac{1}{k}\times\cos\frac{1}{k+1}}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}-\cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}\times\cos\frac{1}{k+1}}$$

$$=\tan\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\times\cos\frac{1}{k+1}}=\tan 1-\tan\frac{1}{n+1}$$

$\boxed{14}$ Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\ln k\times\ln(k+2)}\right)$ pour $n\geqslant 2$.

$$\ln\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\ln k\times\ln(k+2)}\right)=\ln\left(\frac{\ln(k+1)}{\ln k}\right)-\ln\left(\frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{\ln^2(k+1)}{\ln k\times\ln(k+2)}\right)=\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)-\ln\left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right)$$

Remarque : Ce qu'il y a à l'intérieur du ln ne sert à rien.

$\boxed{16}$

$u_k=2^{(-1)^k k}$

1[er] cas : $n=2p$

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{4^p-1}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^p}\right)$$

2[e] cas : $n=2p+1$

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{4^p-1}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4^{p+1}}\right)$$

$\boxed{22}$

Ancienne version :

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}=\frac{n^2}{2}$ (on remarquera que $\dfrac{i}{i+j}=\dfrac{i+j-j}{i+j}$).

Autre méthode (trouvée le samedi 16 septembre 2017) : $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j}$ et $\displaystyle T_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{i+j}$.

Démontrer que $S_n=T_n$.
Calculer S_n+T_n. En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

La nouvelle version a été écrite le 21-8-2021.

$\boxed{25}$ On utilise une récurrence.

$$(1-x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)=\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)-x_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

$$\geqslant 1-\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{n+1}$$

$\boxed{28}$ Il s'agit d'établir une formule sommatoire.

On commence par simplifier $\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}}$. On va démontrer que c'est une quantité rationnelle.

$$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2=k^4+2k^3+3k^2+2k+1=\left(k^2+k+1\right)^2$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}$$

$\boxed{\textbf{30}}$

2°) voir résultat de l'exercice $\boxed{\textbf{1}}$.

Autre méthode :

TD Alexandre Marino avec calcul de somme max(i,j) et min(i, j)
3°) Il faut utiliser la série géométrique dérivée.

$\boxed{\textbf{32}}$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^k + \mathrm{e}^{k+1}}$

Variantes possibles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^k - \mathrm{e}^{k+1}}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^{k+1} + \mathrm{e}^{k-1}}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathrm{e}^k + 2\mathrm{e}^{k+1}}$ etc.

$\boxed{\textbf{34}}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i-j)^2 = p\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} ij + n\sum_{j=1}^{p} j^2$