Condition nécessaire/condition suffisante

Cours

Dans ce chapitre, nous allons approfondir la notion de *phrase conditionnelle* (fondamentale en logique mathématique) et préciser le vocabulaire attaché à ce type d'énoncé.
Nous allons voir qu'une phrase conditionnelle peut être formulée de diverses manières.
L'exemple donné dans le paragraphe 1 sera repris jusqu'au paragraphe 6.

1. On se place dans l'ensemble des rectangles du plan.

On considère deux rectangles R et R' du plan.

On considère les phrases :

A : « R et R' ont les mêmes dimensions. »
(on peut dire aussi : « R et R' sont isométriques » ou « R et R' sont superposables »)

B : « R et R' ont le même périmètre. »

C : « R et R' ont la même aire. »

2. On considère les implications que l'on peut former entre ces énoncés.

On utilise le symbole d'implication logique $\Rightarrow$ (« implique »).

A $\Rightarrow$ B est vraie.

A $\Rightarrow$ C est vraie.

B $\Rightarrow$ C est fausse.

C $\Rightarrow$ B est fausse.

B $\Rightarrow$ A est fausse.

C $\Rightarrow$ A est fausse.

On peut aussi formuler ces implications sous la forme « si …, alors … ».

On dit qu'il y a un lien logique entre les phrases A et B ainsi qu'entre les phrases A et C mais il n'y a aucun lien logique entre les phrases B et C.

Les deux dernières implications sont les réciproques des deux premières.

3. On s'intéresse plus particulièrement à l'implication A $\Rightarrow$ B dont nous avons dit qu'elle est vraie.

L'implication A $\Rightarrow$ B (qui est vraie) peut se formuler sous la forme « Si A est vraie, alors B est vraie » (« Si A est vraie, alors B est forcément vraie »).
On pourra également dire :

« Pour que R et R' aient le même périmètre, *il suffit (il est suffisant)* qu'ils aient les mêmes dimensions ».

« Pour que R et R' aient les mêmes dimensions, *il faut (il est nécessaire)* qu'ils aient le même périmètre ».

On dira que :

- A est *une* **condition suffisante** pour B ;

- B est *une* **condition nécessaire** pour A.

Remarque :

On abrège assez souvent en mathématiques l'expression « condition nécessaire » en « C. N. » et l'expression « condition suffisante » en « C. S. ».

4. Il est important de savoir reformuler ces deux dernières phrases de manière plus longue.

→ **Pour que B soit vraie, il suffit que A soit vraie : A est une condition suffisante pour B.**
Néanmoins, il peut y avoir d'autres conditions suffisantes pour B. Ce n'est pas forcément la seule.

Traduction dans notre exemple « concret » :

Pour que deux rectangles aient le même périmètre, il suffit qu'ils aient les mêmes dimensions.

Avoir les mêmes dimensions est suffisant pour avoir le même périmètre.
Mais ce n'est pas nécessaire.
Deux rectangles qui n'ont pas les mêmes dimensions peuvent très bien avoir le même périmètre (exemple : rectangle de largeur 3 et longueur 5 et rectangle de largeur 2 et longueur 6).

→ **Pour que A soit vraie, il est nécessaire que B soit vraie : B est une condition nécessaire pour A.**
Néanmoins, il peut y avoir d'autres conditions nécessaires pour B. Ce n'est pas forcément la seule.

Traduction dans notre exemple « concret » :

Pour que deux rectangles aient les mêmes dimensions il est nécessaire qu'ils aient le même périmètre.

Avoir le même périmètre est nécessaire pour avoir les mêmes dimensions.
Mais ce n'est pas suffisant.
Deux rectangles qui n'ont pas les mêmes dimensions peuvent très bien avoir le même périmètre.

On retiendra :

• Une implication A ⇒ B, supposée vraie, peut être exprimée de deux manières différentes avec les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante ».
Il est fondamental de ne pas confondre les deux.

• Il est également possible de formuler des phrases avec les expressions « il faut » (condition nécessaire) et « il suffit » (condition suffisante).
Il est fondamental de ne pas mélanger les deux expressions (ne pas employer « il faut » à la place de « il suffit » ni le contraire).

5. Commentaires

• Le mot « condition » : c'est un terme ancien, ça n'est pas vraiment une condition au sens habituel (en mathématiques).

• L'article « une » : il est important. C'est *une* condition ; il peut y en avoir d'autres.

• L'adjectif « nécessaire » (ou plus rarement « suffisante ») est parfois omis. Ainsi on dira, « donner une condition sur …. pour que … ». Il faut réfléchir au type de condition que l'on demande. En général, le contexte aide à trouver la réponse.

6.

a) B n'est pas une condition suffisante pour A.

En effet, il ne suffit pas que R et R' aient le même périmètre pour qu'ils aient les mêmes dimensions.

b) A n'est pas une condition nécessaire pour B.

En effet, il ne faut pas que R et R' aient les mêmes dimensions pour qu'ils aient le même périmètre.

Dans les deux cas, on peut donner la justification suivante (déjà dit plus haut) : deux rectangles peuvent avoir des dimensions différentes et avoir pourtant le même périmètre.

7. Bilan-définition

Lorsqu'une implication A ⇒ B est vraie (où A et B sont deux phrases mathématiques), on peut dire que :

- A est *une* **condition suffisante** pour B ;

- B est *une* **condition nécessaire pour** A.

8. Cas d'une équivalence

Lorsqu'une équivalence A ⇔ B est vraie (où A et B sont des phrases mathématiques), alors on peut dire que :

A est une condition nécessaire pour B et A est aussi une condition suffisante pour B c'est-à-dire que A est en même temps condition nécessaire et condition suffisante pour B.

On dit alors (au choix) :

- A est *une* **condition nécessaire et suffisante** pour B ;

- B est *une* **condition nécessaire et suffisante pour** A.

Exemple :

Le théorème de Pythagore (énoncé direct et réciproque) peut s'énoncer ainsi :

Pour qu'un triangle soit rectangle, il est nécessaire et suffisant que le carré d'un côté soit égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

On peut aussi employer l'expression « il faut et il suffit ».

Pour qu'un triangle soit rectangle, il faut et il suffit que le carré de la longueur d'un côté soit égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Remarque :

On abrège assez souvent en mathématiques l'expression « condition nécessaire et suffisante » en C.N.S..

9. Il est important de faire la différence en mathématiques entre les termes « condition nécessaire » et « condition suffisante » – nous l'avons dit – ainsi que de leur expression à l'aide de phrases (« il faut », « il suffit »), car dans la vie de tous les jours, ça n'est pas généralement pas le cas. En français, les deux sont généralement mêlés et confondus.
En mathématiques, on doit se conformer au langage de la logique. La précision du vocabulaire, si importante en mathématiques, tombe dans la vie courante.

Prenons un exemple emprunté à la vie courante (avec des problèmes et des limites qui n'existent évidemment pas dans un énoncé de mathématiques).

Lorsque l'on dit à un enfant : « Si tu es sage, tu auras du dessert. », *stricto sensu*, la phrase signifie que si l'enfant est sage, il aura un dessert. Rien ne dit que s'il n'est pas sage, il sera privé de dessert.
Simplement, dans sa tête, l'enfant va comprendre : « J'aurais du dessert si et seulement si je suis sage » (et de même dans la tête des parents), ce qui est faux en mathématiques. C'est une mauvaise interprétation de l'enfant, fausse sur le plan mathématique. Être sage est une condition suffisante pour avoir du dessert mais ce n'est pas forcément une condition nécessaire.
La difficulté de cette phrase c'est qu'elle introduit une relation de cause à conséquence (ou de cause à effet) ; celle-ci est absente en mathématiques. Un énoncé conditionnel en mathématiques (en « si…, alors… ») n'exprime pas une relation de cause à conséquence.

On peut également observer que dans notre phrase, il s'agit de deux actions successives avec emploi du présent de l'indicatif dans la première proposition (« es ») et du futur de l'indicatif dans la deuxième proposition (« auras ») ce que l'on n'a pas en mathématiques (tout est exprimé au présent de l'indicatif).
En mathématiques, les deux notions de condition nécessaire et de condition suffisante sont distinctes et il est indispensable d'être précis.
Il est indispensable dans la compréhension des énoncés de propriétés mais également de questions (lors de démonstrations).

Des confusions entre les deux sont à la source de bien d'erreurs fâcheuses de raisonnement (les élèves inventent par exemple des « théorèmes-en-acte »).

Il en est de même des expressions « il faut » et « il suffit » employées parfois l'une pour l'autre en français.
En mathématiques, on doit se garder de telle confusion.

10. Il est important de comprendre en quoi confondre « condition nécessaire » et « condition suffisante » est une faute grave en mathématiques. Condition nécessaire et condition suffisante sont deux notions différentes qu'il importe de bien distinguer en mathématiques. Ce qui peut apparaître comme une subtilité est en fait primordial.

11. Utilisation

• Exemple :

On note x un réel positif.
Soit ABC un triangle tel que $\text{AB} = x$, $\text{BC} = x+1$, $\text{AC} = 3$.

Déterminer x tel que ABC soit rectangle en A.

ABC soit rectangle en A si et seulement si $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$
si et seulement si $(x+1)^2 = x^2 + 9$
si et seulement si $2x+1 = 9$
si et seulement si $x = 4$

On peut conclure :

« Pour que ABC soit rectangle en A, il faut et il suffit que $x = 4$. »

• Il ne faut pas hésiter à utiliser les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante », « condition nécessaire et suffisante » dans la rédaction.

• On peut utiliser le mot « nécessairement » pour remplacer les mots « forcément » ou « indispensable » qu'on évite d'employer dans la rédaction mathématique.

• Le mot « condition » apparaît parfois dans des énoncés d'exercices. La plupart du temps il faut le comprendre au sens de « condition nécessaire et suffisante ».

12. En anglais

condition nécessaire : necessary condition
condition suffisante : sufficient condition
condition nécessaire et suffisante : necessary and sufficient condition

« Find a necessary and sufficient condition that ABCD is a square. »

si et seulement si : if and only if

Résumé-bilan :

L'expression de la condition nécessaire et de la condition suffisante en mathématiques

1. On considère une proposition conditionnelle du type « Si A, alors B ».
On suppose que cette proposition est vraie.

A est une **condition suffisante** de B.
B est une **condition nécessaire** de A.

Pour avoir A, **il faut** avoir B.
Pour avoir B, **il suffit** d'avoir A.

2. On considère une proposition du type « A si et seulement si B ».
On suppose que cette proposition est vraie.

A est une **condition nécessaire et suffisante** de B.
B est une **condition nécessaire et suffisante** de A.

Pour avoir A, **il faut et il suffit** d'avoir B.
Pour avoir B, **il faut et il suffit** d'avoir A.

3.

Condition nécessaire	« Il faut »	« Pour que …, il faut que … »
Condition suffisante	« Il suffit »	« Pour que …, il suffit que … »
Condition nécessaire et suffisante	« Il faut et il suffit »	« Pour que …, il faut et il suffit que … »

L'usage du vocabulaire (comme toujours en mathématiques) doit être raisonné.

4. Types de raisonnements logiques associés :

Raisonnement par condition nécessaire
Raisonnement par condition suffisante
Raisonnement par condition nécessaire et suffisante

Document à lire dans la foulée : Utilisation d'un énoncé en « si et seulement si »

Exercices

1 Soit A, B, I des points du plan.
On considère les énoncés P : « I est le milieu de [AB] » et Q : « $\text{IA} = \text{IB}$ ».

1°) Que peut-on dire des implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$?

2°) Formuler des phrases en utilisant les mots « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

3°) Formuler des phrases en utilisant les expressions « il faut » et « il suffit ».

2 Soit A, B, C des points du plan.
On considère les énoncés P : « A, B, C sont alignés » et Q : « $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$ ».

1°) Que peut-on dire des implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$?

2°) Formuler des phrases en utilisant les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

3°) Formuler des phrases en utilisant les expressions « il faut » et « il suffit ».

3 Soit a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.
On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On considère les énoncés P : « (E) a des solutions dans $\mathbb{R}$ » et Q : « $ac \leqslant 0$ ».

1°) Que peut-on dire des implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$?

2°) Formuler des phrases en utilisant les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

3°) Formuler des phrases en utilisant les expressions « il faut » et « il suffit ».

4 On rappelle la propriété valable dans l'ensemble des réels :

« Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ».

Reformuler cette propriété de deux manières différentes :
- l'une en utilisant l'expression « condition nécessaire et suffisante » ;
- l'autre en utilisant l'expression « il faut et il suffit ».

5 On rappelle les propriétés suivantes qui permettent de savoir si un triangle est constructible :

P_1 :

Soit a, b, c trois réels strictement positifs.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à a, b, c est $|b - a| < c < a + b$.

P_2 :

Pour qu'il existe un triangle admettant pour longueurs de côtés trois réels strictement positifs donnés, il faut et il suffit que le plus grand des trois nombres soit strictement inférieur à la somme des deux autres.

1°) Reformuler la propriété P_1 en utilisant l'expression « il faut et il suffit ».

2°) Reformuler la propriété P_2 en utilisant l'expression « condition nécessaire et suffisante ».

6 On rappelle la propriété suivante :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R' avec $\text{O} \neq \text{O}'$.
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants si et seulement si $|R - R'| < \text{OO}' < R + R'$.

L'intersection de deux cercles est formée de deux points si la distance entre leurs centres est (strictement) inférieure à la somme de leurs rayons et supérieure à leur différence, d'un point si cette distance est égale à la somme ou à la différence des rayons (cercles tangents), vide dans les autres cas.

1°) Faire une phrase sur le modèle ci-dessous :

« Deux cercles de centres distincts sont sécants si et seulement si … ».

2°) Faire une phrase sur le modèle ci-dessous :

« Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles de centres distincts soient sécants est … ».

7 On rappelle la propriété du plan suivante :

Un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités du segment.

Reformuler cette propriété de deux manières différentes :
- l'une en utilisant l'expression « condition nécessaire et suffisante » ;
- l'autre en utilisant l'expression « il faut et il suffit ».

8 On note x un réel positif.
Soit A et B deux points tels que $\text{AB} = 6$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $2x$; $\mathcal{C}'$ le cercle de centre B et de rayon $3x$.
Déterminer x tels que les cercle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soient tangents extérieurement.

9 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit isocèle à l'aide des angles.

Solutions

1

P : « I est le milieu de [AB] »

Q : « $\text{IA} = \text{IB}$ »

1°)

$P \Rightarrow Q$ est vraie (I est le milieu de [AB] $\Rightarrow$ $\text{IA} = \text{IB}$ est vraie)

$Q \Rightarrow P$ est fausse ($\text{IA} = \text{IB} \Rightarrow$ I est le milieu de [AB] est fausse)

2°)

• P est une condition suffisante pour Q.

« I est le milieu de [AB] » est une condition suffisante pour « $\text{IA} = \text{IB}$ ».

Attention, ce n'est pas une condition nécessaire.

• Q est une condition nécessaire pour P.

« $\text{IA} = \text{IB}$ » est une condition nécessaire pour « I est le milieu de [AB] ».

Attention, ce n'est pas une suffisante.

Autrement dit,

P est une condition suffisante pour Q mais non nécessaire.

Q est une condition nécessaire pour P mais non suffisante.

3°)

• Pour que $\text{IA} = \text{IB}$, il suffit que I soit le milieu de [AB].

• Pour que I soit le milieu de [AB], il est nécessaire que $\text{IA} = \text{IB}$.

2

P : « A, B, C sont alignés »

Q : « $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$ »

1°)

$Q \Rightarrow P$ est vraie.

$P \Rightarrow Q$ est fausse.

2°)

• Q est une condition suffisante pour P.

« $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$ » est une condition suffisante pour « A, B, C sont alignés ».

• P est une condition nécessaire pour Q.

« A, B, C sont alignés » est une condition nécessaire pour « $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$ ».

3°)

• Pour que $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$, il faut que A, B, C soient alignés.

• Pour que A, B, C soient alignés, il suffit que $\text{AB} + \text{BC} = \text{AC}$.

3

$ax^2 + bx + c = 0$ (E) (a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$)

P : « (E) a des solutions dans $\mathbb{R}$ »

Q : « $ac \leqslant 0$ »

1°)

$Q \Rightarrow P$ est vraie.

$P \Rightarrow Q$ est fausse

2°)

• Q est une condition suffisante pour P.

« $ac \leqslant 0$ » est une condition suffisante pour « (E) a des solutions dans $\mathbb{R}$ ».

• P est une condition nécessaire pour Q.

« (E) a des solutions dans $\mathbb{R}$ » est une condition nécessaire pour « $ac \leqslant 0$ ».

3°)

• Pour que $ac \leqslant 0$, il faut que (E) ait des solutions dans $\mathbb{R}$.

• Pour que (E) ait des solutions dans $\mathbb{R}$, il suffit que $ac \leqslant 0$.

4 On rappelle la propriété valable dans l'ensemble des réels :

« Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ».

Reformuler cette propriété de deux manières différentes :
- l'une en utilisant l'expression « condition nécessaire et suffisante » ;
- l'autre en utilisant l'expression « il faut et il suffit ».

Une CNS pour qu'un produit de facteurs soit nul est que l'un au moins des facteurs soit nul.

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs soit nul.

5 On rappelle les propriétés suivantes qui permettent de savoir si un triangle est constructible :

P_1 :

Soit *a*, *b*, *c* trois réels strictement positifs.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à *a*, *b*, *c* est $|b-a|<c<a+b$.

P_2 :

Pour qu'il existe un triangle admettant pour longueurs de côtés trois réels strictement positifs donnés, il faut et il suffit que le plus grand des trois nombres soit strictement inférieur à la somme des deux autres.

1°) Reformuler la propriété P_1 en utilisant l'expression « il faut et il suffit ».

Pour qu'il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à *a*, *b*, *c* il faut et il suffit que $|b-a|<c<a+b$.

2°) Reformuler la propriété P_2 en utilisant l'expression « condition nécessaire et suffisante ».

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle admettant pour longueurs de côtés trois réels strictement positifs donnés est que le plus grand des trois nombres soit strictement inférieur à la somme des deux autres.

6 On rappelle la propriété suivante :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O' et de rayon R' avec $\text{O} \neq \text{O}'$.
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants si et seulement si $|R-R'|<\text{OO}'<R+R'$.

L'intersection de deux cercles est formée de deux points si la distance entre leurs centres est (strictement) inférieure à la somme de leurs rayons et supérieure à leur différence, d'un point si cette distance est égale à la somme ou à la différence des rayons (cercles tangents), vide dans les autres cas.

1°) Faire une phrase sur le modèle ci-dessous :

« Deux cercles de centres distincts sont sécants si et seulement si … ».

2°) Faire une phrase sur le modèle ci-dessous :

« Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles de centres distincts soient sécants est … ».

7 **Médiatrice d'un segment**

Une CNS pour qu'un point appartienne à la médiatrice d'un segment est qu'il soit équidistant des extrémités du segment.

Pour qu'un point appartienne à la médiatrice d'un segment, il faut et il suffit qu'il soit équidistant des extrémités.

8 $\text{AB}=6$.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement $\Leftrightarrow 2x+3x=6$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6}{5}$$

9 Pour qu'un triangle soit isocèle il faut et il suffit qu'il possède deux angles de même mesure.

Extrait du programme :

« Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à […] utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante ».