TS1

Devoir pour le vendredi 2 mai 2014

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M(x ; y) du plan associe le point $\mathrm{M}'\left(x'; y'\right)$ avec $x' = \mathrm{e}^x$ et $y' = \mathrm{e}^y$. Le point M' est appelé l'image de M par f.

On utilisera *Geogebra* pour formuler des conjectures.

1°) Démontrer que pour tout point M du plan P, on a $\mathrm{M}' \in E$ avec $E = \left\{\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right) \in P \,/\, x > 0 \text{ et } y > 0\right\}$.

2°) Recopier et compléter les phrases :

• Lorsque M décrit l'axe (Ox), M' décrit …. .

• Lorsque M décrit l'axe (Oy), M' décrit …. .

• Lorsque M décrit la droite d'équation $y = x$, M' décrit …. .

3°) On note Γ la courbe de la fonction logarithme népérien.

Démontrer que si $\mathrm{M} \in \Gamma$, alors $\mathrm{M}' \in \Gamma$.
On dit que Γ est globalement invariante par f.

4°) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

a) Prendre $R = 1$ et observer la courbe sur laquelle se déplace M'.

b) On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

On rappelle que $\mathcal{C}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{C}'$ et tracer $\mathcal{C}'$ sur l'écran de la calculatrice pour $R = 1$.

c) Démontrer que $\mathcal{C}'$ est située à l'intérieur du carré OABC où $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}^R\,;0\right)$, $\mathrm{B}\left(\mathrm{e}^R\,;\mathrm{e}^R\right)$, $\mathrm{C}\left(0\,;\mathrm{e}^R\right)$.

d) Démontrer que $\mathcal{C}'$ est la courbe d'équation $\left(\ln x\right)^2 + \left(\ln y\right)^2 = R^2$.