Démarche déductive, démarche par équivalence

Introduction :

La démarche déductive (1) est au cœur du raisonnement en mathématiques (vu en philosophie avec Descartes – il fait de longue chaîne d'équivalences pour donner à la philosophie un aspect aussi rigoureux que les mathématiques). Dès l'Antiquité, ce type de raisonnement apparaît dans les premiers traités de mathématiques.

Au collège, les élèves sont initiés très tôt à ce type de démarche : les énoncé de propriétés sont donnés sous la forme « si … alors … ». Mais le raisonnement mathématique ne se limite pas à ce type de raisonnement. Il en existe d'autre comme l'absurde, la récurrence, la disjonction de cas, l'analyse-synthèse (si telle chose existe, alors … alors … ; réciproquement …).

I. Inégalités successives

1°) Voici deux exemples d'énoncés :

1. Démontrer que si $x \geqslant 3$ alors $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

L'énoncé appelle clairement une démarche déductive. Ce type de question ne se prête pas par raisonnement par équivalence.

2. Démontrer que quel que soit x appartenant à $[3\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

L'énoncé est presque similaire au précédent. On procède par démarche déductive et non par équivalences.

2°) Résolution

Soit x un réel quelconque tel que $x \geqslant 3$.

On a alors $x+1 \geqslant 4$.

Donc $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{4}$ car les deux membres sont positifs strictes (passage à l'inverse autorisé)

3°) Commentaires

Le raisonnement par déduction utilise les mots donc, d'où, par conséquent…
Dans notre exemple il n'est pas possible de résoudre par équivalence.

En effet $x+1 \geqslant 4$ n'est pas équivalente à $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Même lorsqu'on peut effectuer un raisonnement par équivalence, on s'en tient en général à une démarche déductive

Remarque : on peut employer des implications avec quelques restrictions.

4°) Présentation avec des implications

$x \geqslant 3 \Rightarrow x+1 \geqslant 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{4}$

II. Équations / inéquations

1°) Lors de la résolution d'équation / inéquation, on essaie de mener la résolution de bout en bout par des équivalences (on évite les ruptures, on tâche de ne passer à aucun moment à un « donc »).

2°) Néanmoins, il peut arriver que l'on ne puisse résoudre l'équation / inéquation que par des implications. Dans ce cas il faut passer par une étape de vérification.

3°) Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 2$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} < 0$

On achève la résolution au moyen d'un tableau de signes.

On notera que, durant la résolution, on a utilisé une « chaîne d'équivalences ».

III. Utilisation de propriétés énoncées par équivalence

1°)

Au lycée, de nombreux énoncés de propriétés sont donnés sous forme d'une équivalence : « … si et seulement si … » au lieu de deux énoncés formulés en « si … alors ... » à la « façon collège ». Leur utilisation pratique ne fait cependant intervenir qu'un seul sens.

2°) Exemple

Dans le plan muni d'un repère, deux vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
On utilise le sens de droite à gauche pour démontrer que deux vecteurs sont colinéaires.

On utilise la contraposée du sens de gauche à droite pour démontrer que deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

(1) Le nom complet est « démarche hypothético-déductive ».