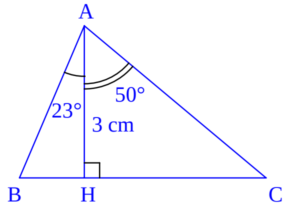
1ère S1

Contrôle du vendredi 14 février 2014 (30 min)

Prénom : .... **Nom :** .... **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1 point + 1 point)

On considère la figure ci-contre où ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On donne $AH = 3$ cm ; $\widehat{BAH} = 23°$; $\widehat{CAH} = 50°$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de ABC en cm^2 (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).



$\mathcal{A}$ = ... cm^2 (valeur exacte)

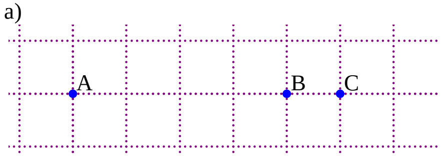
$\mathcal{A} \approx$ .... cm^2 (valeur arrondie au dixième)

II. (10 points : 1 point par réponse)

Le plan est quadrillé par un maillage constitué de carrés de côté 1 (une unité de longueur étant fixée).
Les points A, B, C, D sont situés sur le réseau. Il est demandé de ne rien écrire ni tracer sur les figures.

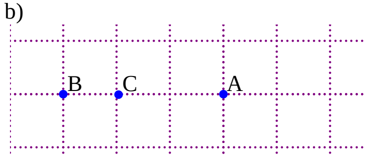
1°) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

a)



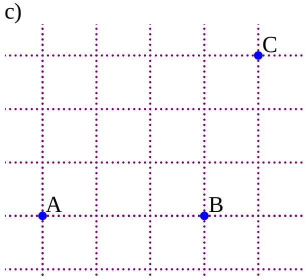
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

b)



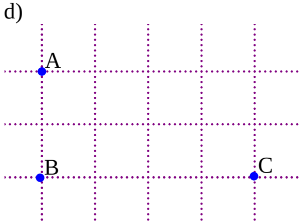
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

c)



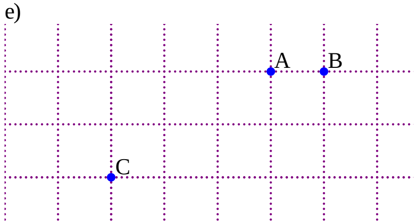
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

d)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

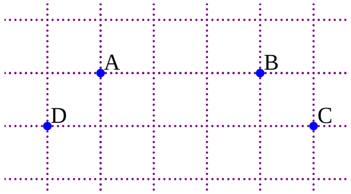
e)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

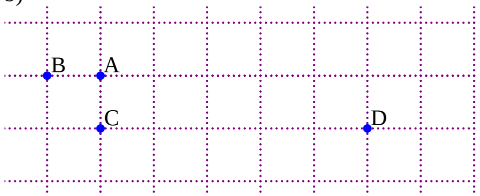
2°) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ dans chacun des cas suivants.

a)



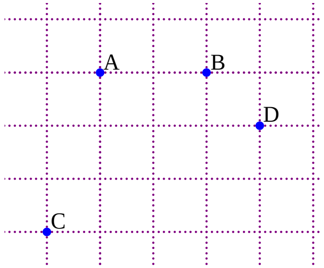
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ....

b)



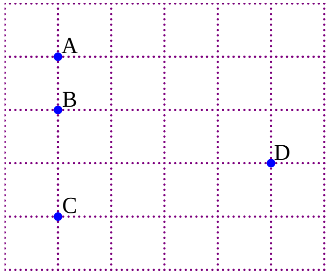
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ....

c)



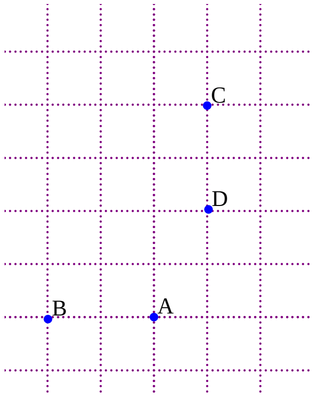
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ....

d)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ....

e)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ ....

III. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'on ait : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ et $\|\vec{u}\| = 3$.

1°) Calculer $\vec{u} \cdot \left(2\vec{v}\right)$.

2°) Calculer $\vec{u} \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

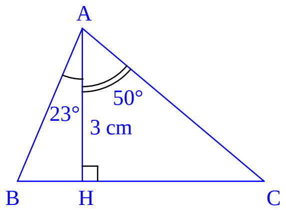
IV. (6 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 2a$ et $BC = a$ où a est un réel strictement positif donné.
On note I le milieu de [CD].
Démontrer à l'aide du produit scalaire que le triangle ABI est rectangle en I.

Corrigé du contrôle du 14-2-2014

I.

On considère la figure ci-contre où ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On donne $AH = 3\text{ cm}$; $\widehat{BAH} = 23°$; $\widehat{CAH} = 50°$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de ABC en cm^2 (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).



$$\mathcal{A} = \frac{9(\tan 23° + \tan 50°)}{2}\ \text{cm}^2 \quad \text{(valeur exacte)}$$

À l'aide de la calculatrice (mise en mode degré), on trouve : $\mathcal{A} = 7{,}2730278...\ \text{cm}^2$.

Donc $\mathcal{A} \approx 7{,}3\ \text{cm}^2$ (valeur arrondie au dixième)

Explication :

On utilise la formule « SOCATOAH » dans les triangles ABH et ACH rectangles en H.

$\tan \widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AH}$ d'où $\tan 23° = \dfrac{BH}{3}$ donc $BH = 3 \times \tan 23°$

$\tan \widehat{ABH} = \dfrac{CH}{AH}$ d'où $\tan 50° = \dfrac{CH}{3}$ donc $CH = 3 \times \tan 50°$

$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$= \frac{(3\tan 23° + 3\tan 50°) \times 3}{2}$$

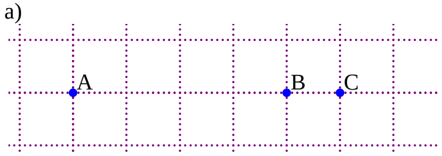
$$= \frac{9(\tan 23° + \tan 50°)}{2}$$

II.

Le plan est quadrillé par un maillage constitué de carrés de côté 1 (une unité de longueur étant fixée).
Les points A, B, C, D sont situés sur le réseau. Il est demandé de ne rien écrire ni tracer sur les figures.

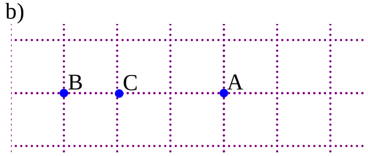
1°) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

a)



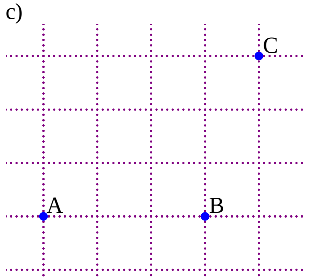
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b)



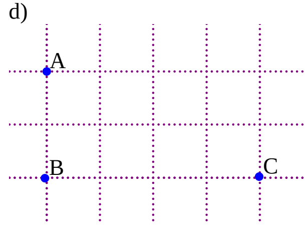
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

c)



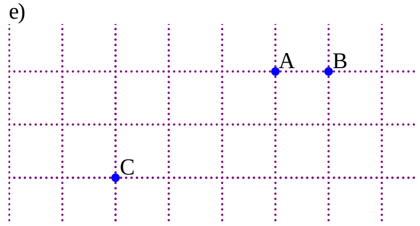
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$

d)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

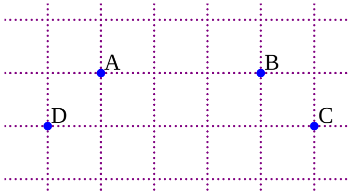
e)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3$

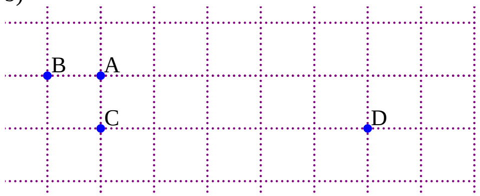
2°) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ dans chacun des cas suivants.

a)



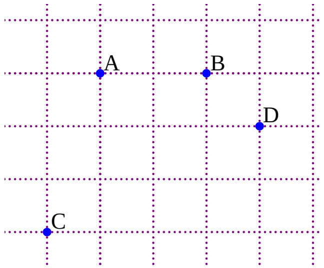
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -15$

b)



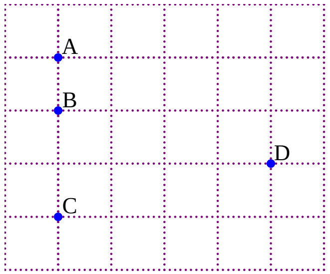
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -5$

c)



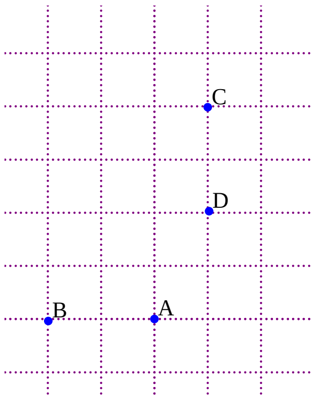
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 8$

d)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1$

e)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Cet exercice était un exercice « cadeau » qui pouvait presque se faire par calcul mental.

Deux méthodes interviennent dans cet exercice :

- expression du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ;

- expression du produit scalaire de deux vecteurs non nuls à l'aide du projeté orthogonal.

III.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que l'on ait : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ et $\|\vec{u}\| = 3$.

1°) Calculer $\vec{u} \cdot \left(2\vec{v}\right)$.

2°) Calculer $\vec{u} \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$.

On utilise la bilinéarité du produit scalaire.

1°)

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \left(2\vec{v}\right) &= 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) \\ &= 2 \times (-4) \\ &= -8 \end{aligned}$$

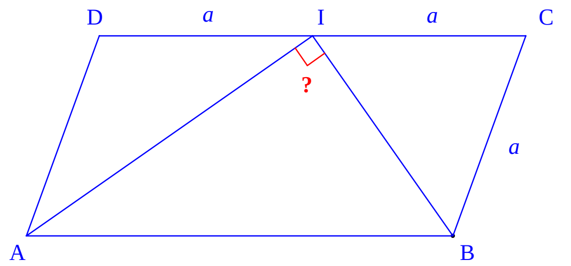
2°)

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

III.

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 2a$ et $BC = a$ où a est un réel strictement positif donné.
On note I le milieu de [CD].
Démontrer à l'aide du produit scalaire que le triangle ABI est rectangle en I.

On fait une figure (disposition classique d'un parallélogramme : angle $\widehat{BAD}$ aigu, droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D au-dessus de (AB)).
Évidemment, on ne trace pas un rectangle comme l'ont fait beaucoup d'élèves sur leur brouillon. Cela constitue en effet un cas particulier et tous les calculs de la suite s'en trouvent faussés.



On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ en utilisant la méthode de décomposition (seule méthode possible).

On démarre sèchement le calcul de ce produit scalaire sans donner d'explication.

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \left(-\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA}\right)$ ($\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC}$ car I est le milieu de [CD] et $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ car ABCD est un parallélogramme)

$= \left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{IC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{IC}\right)$

$= DA^2 - IC^2$ (identité remarquable scalaire)

$= a^2 - a^2$

$= 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux.
On en déduit que le triangle AIB est rectangle en I.