1$^{\text{ère}}$ S1

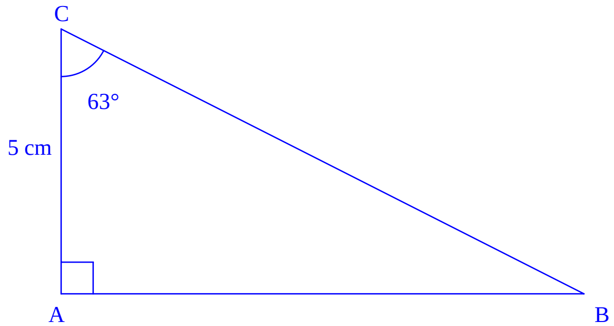
Contrôle du vendredi 7-2-2014 (30 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

Il est demandé de ne rien écrire sur les figures.

I. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 5$ cm et $\widehat{ACB} = 63°$.
Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de ABC en cm^2 (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).



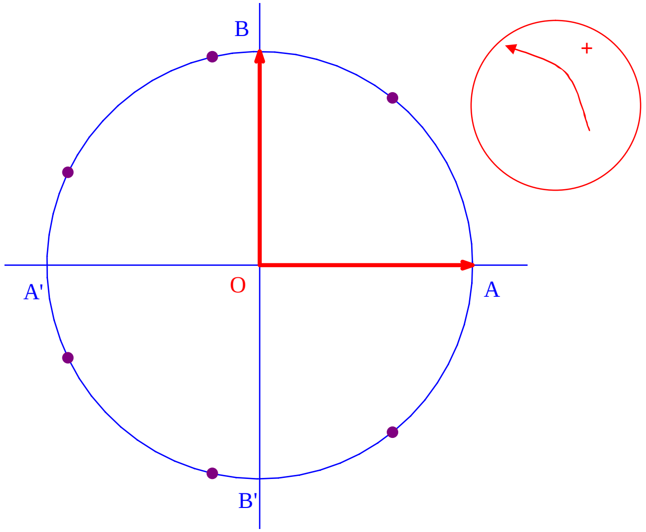
$\mathcal{A}$ = ... (valeur exacte) $\mathcal{A} \approx$ .... (valeur arrondie au dixième)

II. (6 points : 3 points + 3 points)

On pose : $S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$, $T = \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$, $U = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$,
$V = \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$.

Quelles égalités peut-on écrire entre S et T d'une part, entre U et V d'autre part ?
Rédiger une démonstration en utilisant les propriétés des cosinus et des sinus.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique ci-contre sur lequel on a représenté les images des nombres $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}$, $\frac{10\pi}{7}$, $\frac{12\pi}{7}$.

On précise que l'on ne peut pas calculer de valeurs exactes des lignes trigonométriques des nombres $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}$, $\frac{10\pi}{7}$, $\frac{12\pi}{7}$.



………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

III. (4 points)

Soit a et b deux réels fixés. Pour tout réel x, on pose $A=\left(a\cos x+b\sin x\right)^2+\left(b\cos x-a\sin x\right)^2$.
Calculer A.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(-\dfrac{2013\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{2013\pi}{4}\right)$. Détailler la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (3 points)

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ (compléter les deux lignes).

$f(x)$ existe si seulement si …………………………………………………..

si seulement si …………………………………………………..

Donc $\mathcal{D}$ = ...

VI. (1 point)

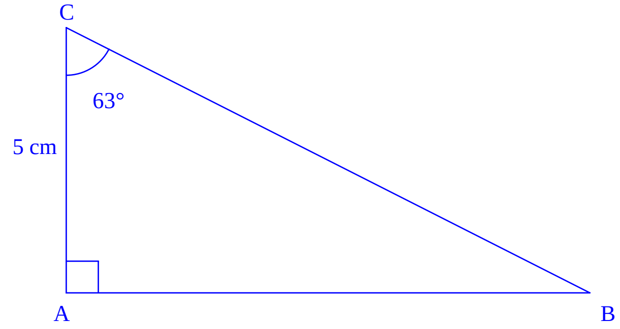
Calculer à l'aide de la calculatrice la somme $S=\sum_{k=1}^{k=20}\dfrac{k}{k^2+1}$.

S = ... (valeur arrondie au millième)

Corrigé du contrôle du 7-2-2014

I.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 5$ cm et $\widehat{ACB} = 63°$.
Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de ABC en cm^2 (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).



On a : $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times AC}{2}$ (formule de l'aire d'un triangle rectangle).

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$ (formule « SOHCAHTOA »*) donc $\tan 63° = \dfrac{AB}{5}$

d'où $AB = 5 \tan 63°$.

Donc $\mathcal{A} = \dfrac{5 \tan 63° \times 5}{2}$ d'où $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{25 \tan 63°}{2} \text{ (valeur exacte)}}$.

Avec la calculatrice, on trouve $\mathcal{A} = 24{,}5326313\ldots$.

D'où $\boxed{\mathcal{A} \approx 24{,}5 \text{ (valeur arrondie au dixième)}}$.

* $\text{tangente} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$ (dans un triangle rectangle)

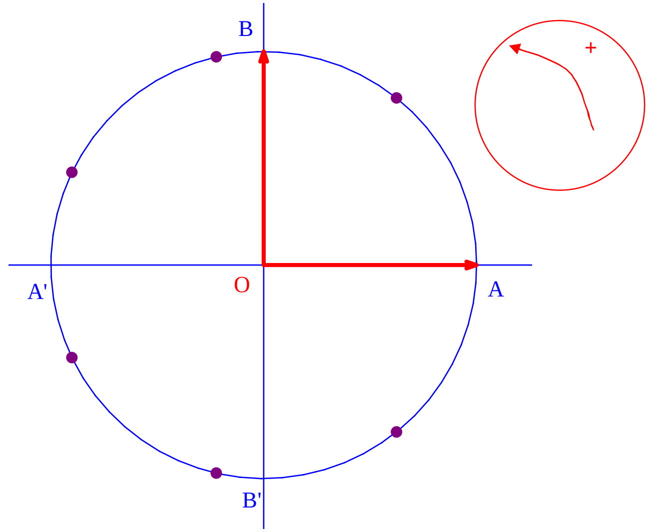
II.

On pose : $S = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$, $T = \cos\dfrac{8\pi}{7} + \cos\dfrac{10\pi}{7} + \cos\dfrac{12\pi}{7}$, $U = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{6\pi}{7}$,

$V = \sin\dfrac{8\pi}{7} + \sin\dfrac{10\pi}{7} + \sin\dfrac{12\pi}{7}$.

Quelles égalités peut-on écrire entre S et T d'une part, entre U et V d'autre part ?
Rédiger une démonstration en utilisant les propriétés des cosinus et des sinus.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique ci-contre sur lequel on a représenté les images des nombres $\dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{4\pi}{7}$, $\dfrac{6\pi}{7}$, $\dfrac{8\pi}{7}$, $\dfrac{10\pi}{7}$, $\dfrac{12\pi}{7}$.

On précise que l'on ne peut pas calculer de valeurs exactes des lignes trigonométriques des nombres $\dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{4\pi}{7}$, $\dfrac{6\pi}{7}$, $\dfrac{8\pi}{7}$, $\dfrac{10\pi}{7}$, $\dfrac{12\pi}{7}$.



$$
\begin{aligned}
T &= \cos\left(2\pi - \frac{6\pi}{7}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right)\\
&= \cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\\
&= \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\\
&= S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \sin\left(2\pi - \frac{6\pi}{7}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right)\\
&= \sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right) + \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\\
&= -\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\\
&= -U
\end{aligned}
$$

Il y a avait d'autres démarches possibles qui sont cependant un peu maladroites.

III.

Soit a et b deux réels fixés. Pour tout réel x, on pose $A=\left(a\cos x+b\sin x\right)^2+\left(b\cos x-a\sin x\right)^2$.
Calculer A.

$$A=\left(a\cos x+b\sin x\right)^2+\left(b\cos x-a\sin x\right)^2$$

$$=a\cos^2 x\cancel{+2ab\cos x\sin x}+b^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\cancel{-2ab\cos x\sin x}+a^2\sin^2 x$$

$$=a^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+b^2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$=a^2\times 1+b^2\times 1$$

$$=a^2+b^2$$

Ainsi, A est indépendante de x.

On a utilisé la relation fondamentale $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

IV.

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(-\dfrac{2013\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{2013\pi}{4}\right)$.

On utilise les formules de trigonométrie.

$$\cos\left(-\frac{2013\pi}{4}\right)=\cos\left(-252\times 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{2013\pi}{4}\right)=\sin\left(-252\times 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

V.

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ (compléter les deux lignes).

$f(x)$ existe si seulement si $9-x^2\geqslant 0$
si seulement si $-3\leqslant x\leqslant 3$ (règle du signe d'un trinôme du second degré)

Donc $\mathcal{D}=\left[-3\,;3\right]$.

VI.

Calculer à l'aide de la calculatrice la somme $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=20}\frac{k}{k^2+1}$.

On utilise la calculatrice. On obtient l'affichage 2,927061322.

Donc $S\approx 2{,}927$ (valeur arrondie au millième).

On peut noter que S est un nombre rationnel (car c'est une somme de nombres rationnels).