TS1

Devoir pour le vendredi 7 février 2014

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier* la fonction *f*.

2°) Tracer $\mathcal{C}$ « à la main ». On fera figurer tous les éléments utiles au tracé.

*Étudier une fonction consiste :

- à déterminer son ensemble de définition, sa périodicité, sa parité ;
- à donner un domaine d'étude ;
- à calculer sa dérivée ;
- à calculer limites les limites et à donner les interprétations graphiques correspondantes ;
- à dresser le tableau de variation.

Corrigé du devoir pour le 7-2-2014

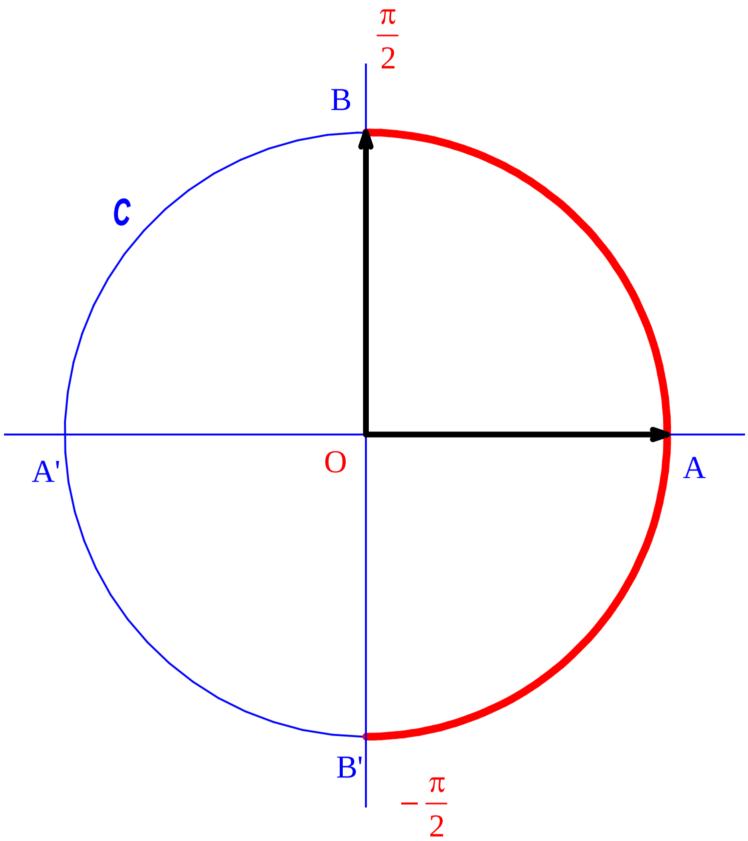
1°) **Étude de *f***

• Le tracé de la courbe représentative de *f* ne manque pas de nous étonner, que ce soit sur calculatrice graphique ou sur logiciel de tracé de courbe.

• **Ensemble de définition**

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\cos x > 0$

On trace le cercle trigonométrique.
Les réels x tels que $\cos x > 0$ sont les réels dont l'image appartient à l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BB'}}$ (extrémités exclues).
On trace cet arc en rouge.



$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$$ (il s'agit d'une réunion infinie d'intervalles)

• **Périodicité**

$\forall x \in \mathcal{D}_f \qquad x+2\pi \in \mathcal{D}_f$ et $x-2\pi \in \mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \ln\left[\cos(x+2\pi)\right] \\ &= \ln(\cos x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc *f* est périodique de période $\mathrm{T} = 2\pi$.

• **Parité**

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad -x \in \mathcal{D}_f \qquad (\mathcal{D}_f$ est centré en 0)

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left[\cos(-x)\right] \\ &= \ln(\cos x) \qquad \text{(on utilise la propriété } \cos(-x) = \cos x \text{ car la fonction cosinus est paire)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

• **Domaine d'étude**

f est périodique de période $\mathrm{T} = 2\pi$ donc il suffit d'étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π inclus dans $\mathcal{D}_f$ soit $\left]-\pi\,;\,\pi\right[$ et même $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

f est paire donc il suffit d'étudier f sur la partie positive » de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, soit $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

• **Dérivée**

f est dérivable $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$ (on utilise la formule de dérivation : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$)

$$= -\tan x$$

• **Variations**

On peut dresser le tableau de variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ ou sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$
SGN de $\sin x$		$-$	0	$+$	
SGN de $\cos x$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert$

Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$
SGN de $\sin x$	0	$+$	
SGN de $\cos x$		$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert$

Comme f est paire, f est décroissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.

• **Limites**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}\underbrace{\cos x}_{X}=0^+\\ \lim\limits_{X\to 0^+}\ln X=-\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=-\infty$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet les droites d'équations $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$ (et toutes les droites qui se déduisent par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$).

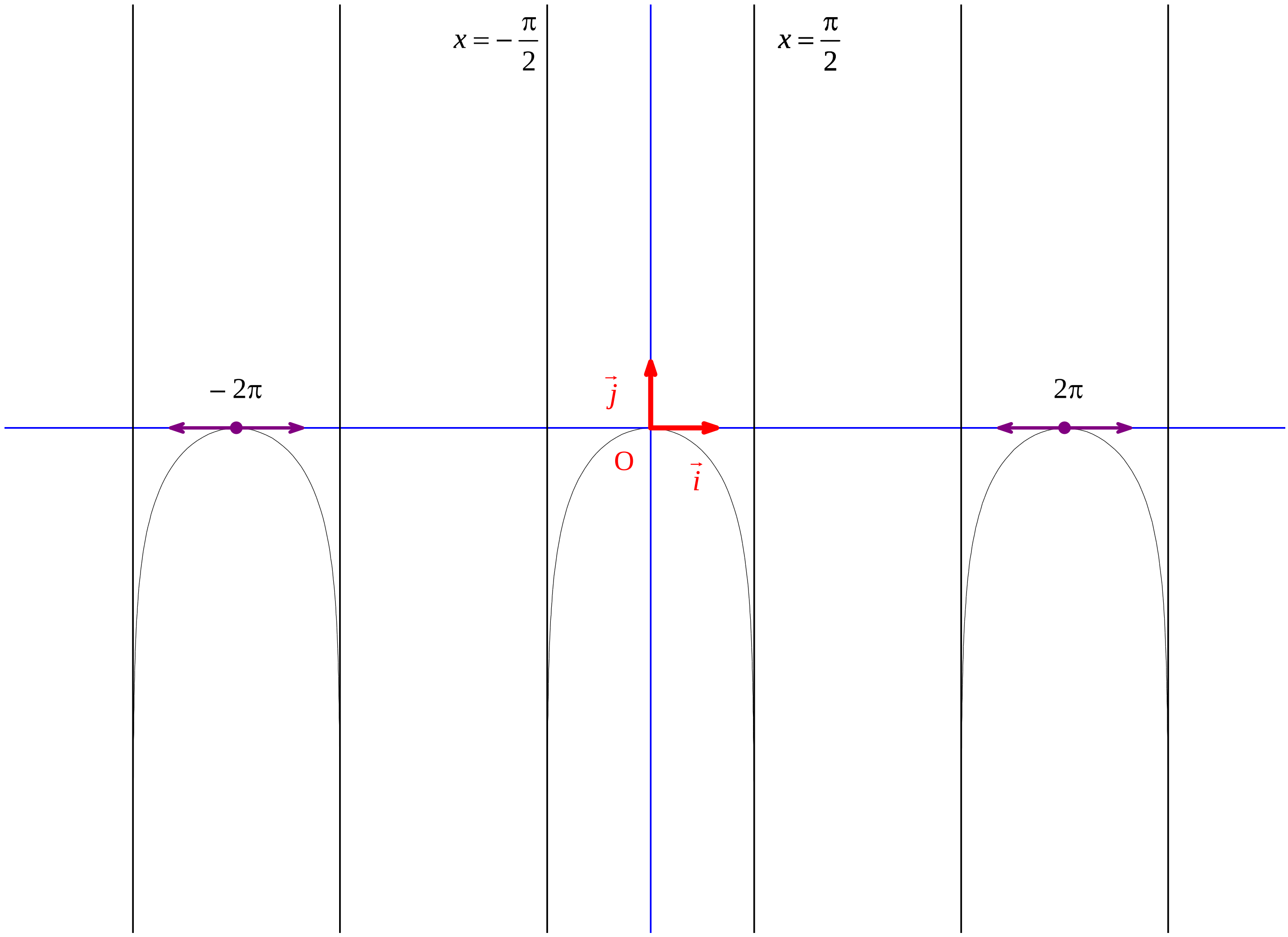
2°) Tracé de $\mathcal{C}$

La courbe est située en dessous de l'axe des abscisses.

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en tous les points d'abscisses $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Comme f est paire et que le repère est orthogonal, $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe des symétrie.

On trace ensuite les asymptotes verticales.



$x = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{2}$
-2π
2π
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$