Solutions rationnelles d'une équation polynomiale à coefficients entiers

On s'intéresse aux racines rationnelles d'une équation polynomiale de degré n du type
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ où a_0, a_1, … a_n appartiennent à $\mathbb{Z}$ avec $a_n \neq 0$.

Partie A. Étude d'un cas particulier

On considère l'équation $x^7 - 6x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 31x + 2 = 0$ (1).

Démontrer que si m est un entier relatif solution de (1), alors $m \mid 2$.
L'équation (1) admet-elle des solutions entières ?

Partie B. Cas général

On se place dans le cas général d'une équation polynomiale $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ (E) où a_0, a_1, … a_n sont des entiers relatifs tels que $a_n \neq 0$.

On suppose que (E) admet une solution de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$.

Démontrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
Ce résultat est appelé *critère d'Eisenstein*.

Partie C. Une application

Déterminer en utilisant le critère établi dans la **partie B**, les racines de l'équation $15x^3 - 43x^2 - 7x + 3 = 0$ (E).

Solution

Partie A

Supposons que m soit un entier relatif solution de (1).

On a alors : $m^7 - 6m^4 + 5m^3 - 3m^2 - 31m + 2 = 0$.

D'où $m\underbrace{\left(-m^6 + 6m^3 - 5m^2 + 3m + 31\right)}_{\text{entier relatif}} = 2$.

donc $m \mid 2$.

$\mathcal{D}(2) = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

2 est solution de (1).

– 1, 1 et – 2 ne sont pas solutions de (1).

2 est donc la seule solution entière de (1).

Partie B

$\dfrac{p}{q}$ est solution de (E) donc $a_n\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_2\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 + a_1 \times \dfrac{p}{q} + a_0 = 0$.

D'où $a_n \dfrac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\dfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_2 \times \dfrac{p^2}{q^2} + a_1 \times \dfrac{p}{q} + a_0 = 0$.

On multiplie les deux membres par q^n.

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} \times q + \dots + a_2 \times p^2 \times q^{n-2} + a_1 \times p \times q^{n-1} + a_0 \times q^n = 0 \qquad (1)$$

Démontrons que $p \mid a_0$.

(1) donne alors :
$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} \times q + \dots + a_2 \times p^2 \times q^{n-2} + a_1 \times p \times q^{n-1} = -a_0 \times q^n$$

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} \times q + \dots + a_2 \times p \times q^{n-2} + a_1 \times q^{n-1}\right) = -a_0 \times q^n$$

Cette dernière égalité montre que $p \mid -a_0 \times q^n$.

Or p et q sont premiers entre eux donc p et q^n sont premiers entre eux (propriété du cours).
D'après le théorème de Gauss, $p \mid a_0$.

Démontrons que $q \mid a_n$.

(1) donne alors :
$a_{n-1}p^{n-1} \times q + ... + a_2 \times p^2 \times q^{n-2} + a_1 \times p \times q^{n-1} + a_0 \times q^n = -a_n p^n$

$q\left(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_2 \times pq^{n-3} + a_1 \times pq^{n-1} + a_0 q^{n-1}\right) = -a_n \times p^n$

Cette dernière égalité montre que $q \mid -a_n \times p^n$.

Or p et q sont premiers entre eux donc p et q^n sont premiers entre eux (propriété du cours).
D'après le théorème de Gauss, $q \mid a_n$.

Partie C

Si (E) admet une racine rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $\text{PGCD}(p\,;q) = 1$, alors :
$p \mid 3$ et $q \mid 15$.

On peut supposer p entier relatif et q entier naturel non nul.

$\mathcal{D}(3) = \{-3\,;-1\,;1\,;3\}$

$\mathcal{D}(15) = \{-15\,;-5\,;-3\,;-1\,;1\,;3\,;5\,;15\}$

On forme toutes les fractions possibles formées d'un diviseur de 3 au numérateur sur un diviseur de 15 au dénominateur.

$\frac{p}{q} = \frac{3}{15}$

$\frac{p}{q} = -\frac{3}{15}$

$\frac{p}{q} = \frac{1}{15}$

$\frac{p}{q} = -\frac{1}{15}$

$\frac{p}{q} = \frac{3}{5}$ convient

$\frac{p}{q} = -\frac{3}{5}$

$\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$

$\frac{p}{q} = -\frac{1}{5}$

$\frac{p}{q} = 1$

$\frac{p}{q} = -1$

$\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$

$\frac{p}{q} = -\frac{1}{3}$ convient

$\frac{p}{q} = 3$ convient

$\frac{p}{q} = -3$

On teste ces valeurs.

Les valeurs $\frac{3}{5}$, $-\frac{1}{3}$, 3 fonctionnent.
Ce sont les racines de (E).

Suite :

Partie D. Une autre application (1)

On pose $\alpha = \cos\frac{2\pi}{9}$.

1°) Démontrer que $8\alpha^3 - 6\alpha + 1 = 0$.

On rappelle que pour tout réel x on a : $\cos 3x = 4\cos^3 - 3\cos x$.

2°) Démontrer que α est irrationnel.

Partie E. Une autre application (2)

On pose $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{13}$.

1°) Démontrer que l'on $\alpha^4 - 32\alpha^2 + 100$.

2°) Démontrer que α est irrationnel.