TS1 spé

Devoir pour le jeudi 9 janvier 2014

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ et des points A_0, A_1, …, A_{99} de $\mathscr{C}$, régulièrement espacés et dont les indices correspondent au sens trigonométrique, qui partagent le cercle en 100 arcs de même longueur.

Une puce est placée initialement au point A_0. Elle effectue un premier bond qui l'amène sur le point A_1 puis un deuxième en sautant par-dessus un point jusqu'au point A_3. Elle saute ensuite par-dessus deux points jusqu'au point A_6 puis elle continue en sautant à chaque fois un point de plus.

La puce atteindra-t-elle tous les points A_0, A_1, …, A_{99} de $\mathscr{C}$?

Avertissement :

La version donnée ici est volontairement très sèche.

Toute latitude est laissée quant aux méthodes…

En fonction des réactions et des questions qui me seront posées, je donnerai des indices permettant d'avancer dans la recherche.

Pour aller plus loin :

Peut-on généraliser à un nombre quelconque de points (supérieur ou égal à 3) ?

Corrigé effectué en classe le 6-2-2014

1^er critère :

On commence par définir une suite (u_n).
On note u_n la longueur du trajet parcourue par la puce au bout de n sauts.
On prend pour unité de longueur la longueur d'un arc de cercle joignant deux points consécutifs.

On a : $u_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Donc on a $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (inutile de faire de grandes démonstrations).

2^e critère : On effectue une congruence modulo 100.
On démontre que $u_{n+200} \equiv u_n$ [100].

3^e critère : On démontre que l'on a : $u_{199-n} \equiv u_n$ [100].

On établit ainsi une périodicité des déplacements et symétrie.

Les positions atteintes par la puce sont forcément atteintes pendant les 100 premiers sauts.
Toutes les positions ne sont pas atteintes.