TS1

Devoir pour le 6-1-2014

I. Soit u un nombre complexe donné.

À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{u - \overline{u}\,z}{1-z}$.

1°) Démontrer que $Z - \overline{Z} = \dfrac{\left(u-\overline{u}\right)\left(1-|\,z\,|^2\right)}{|\,1-z\,|^2}$.

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
On discutera selon le nombre u.

II.

1°) Soit a, b, c, d quatre réels donnés.
En considérant les nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = c + \mathrm{i}d$, démontrer l'égalité suivante appelée identité de Lagrange :

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = \left(ac-bd\right)^2 + \left(ad+bc\right)^2.$$

2°) On note E l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers relatifs.

On a donc l'équivalence suivante :

$$n \in E \Leftrightarrow \text{il existe } (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } n = a^2 + b^2.$$

a) Démontrer à l'aide de l'identité de Lagrange que l'ensemble E est stable par produit c'est-à-dire que le produit de deux éléments quelconques de E est encore un élément de E.

b) En observant que $1105 = 13 \times 85$ et que $1105 = 65 \times 17$, démontrer que $1105 \in E$ et déterminer deux décompositions de 1105 comme sommes de deux carrés parfaits.

c) ***Facultatif***

Donner un exemple d'éléments de E qui admet trois décompositions différentes comme sommes de deux carrés parfaits.

Conseil :

I. Ne pas repasser en forme algébrique.

Corrigé du DM pour le 6-1-2013

I.

$u \in \mathbb{C}$ donné

$$Z = \frac{u - \overline{u}\, z}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

1°) **Démontrons que $Z - \overline{Z} = \dfrac{\left(u - \overline{u}\right)\left(1 - |\, z\,|^2\right)}{|\, 1 - z\,|^2}$.**

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{u - \overline{u}\, z}{1 - z}\right)}$$
$$= \frac{\overline{u - \overline{u}\, z}}{\overline{1 - z}}$$
$$= \frac{\overline{u} - u\overline{z}}{1 - \overline{z}}$$

On utilise les propriétés du conjugué d'un quotient, d'une somme, d'une produit ainsi que le conjugué d'un conjugué.

$$Z - \overline{Z} = \frac{u - \overline{u}\, z}{1 - z} - \frac{\overline{u} - u\overline{z}}{1 - \overline{z}}$$

$$= \frac{\left(1 - \overline{z}\right)\left(u - \overline{u}\, z\right) - \left(1 - z\right)\left(\overline{u} - u\overline{z}\right)}{\left(1 - z\right)\left(1 - \overline{z}\right)}$$

$$= \frac{u - u\overline{z} - \overline{u}z + \overline{u}z\overline{z} - \left(\overline{u} - u\overline{z} - z\overline{u} + uz\overline{z}\right)}{\left(1 - z\right)\left(1 - \overline{z}\right)}$$

$$= \frac{\left(u - \overline{u}\right) + \left(\overline{u} - u\right)z\overline{z}}{\left(1 - z\right)\overline{\left(1 - z\right)}}$$

$$= \frac{\left(u - \overline{u}\right) - \left(u - \overline{u}\right)|\, z\,|^2}{|\, 1 - z\,|^2} \qquad (\text{car} \quad z\overline{z} = 1)$$

$$= \frac{\left(u - \overline{u}\right)\left(1 - |\, z\,|^2\right)}{|\, 1 - z\,|^2}$$

$$= \frac{\left(u - \overline{u}\right)\left(1 - |\, z\,|^2\right)}{|\, 1 - z\,|^2}$$

2°) **Déterminons l'ensemble *E* des points M de *P* d'affixe *z* tels que *Z* soit réel.**

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq 1$.

M $\in E$ si et seulement si $Z \in \mathbb{R}$

si et seulement si $Z = \overline{Z}$

si et seulement si $Z - \overline{Z} = 0$

si et seulement si $\dfrac{\left(u-\overline{u}\right)\left(1-|\,z\,|^2\right)}{|\,1-z\,|^2} = 0$

si et seulement si $\left(u-\overline{u}\right)\left(1-|\,z\,|^2\right) = 0$

On discute selon le nombre *u*.

1$^{\text{er}}$ cas : $u - \overline{u} = 0$ c'est-à-dire $u \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, $E = P \setminus \{\text{A}\}$ où A est le point d'affixe 1.

On peut observer que dans ce cas, $Z = \dfrac{u - u\,z}{1-z} = u\dfrac{1-z}{1-z} = u$.

2$^{\text{e}}$ cas : $u - \overline{u} \neq 0$ c'est-à-dire $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

M $\in E$ si et seulement si $1-|\,z\,|^2 = 0$

si et seulement si $|\,z\,|^2 = 1$

si et seulement si $|\,z\,| = 1$

si et seulement si $\text{OM} = 1$

Dans ce cas, $E = \mathcal{C} \setminus \{\text{A}\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point d'affixe 1.

II.

1°) $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

Démontrons que $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

$z = a + \mathrm{i}b$
$z' = c + \mathrm{i}d$

D'une part,

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= |z|^2 \times |z'|^2 \\ &= \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \end{aligned}$$

D'autre part,

$zz' = ac - bd + \mathrm{i}(ad+bc)$ avec $ac-bd \in \mathbb{R}$ et $ad+bc \in \mathbb{R}$

Donc $|zz'|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

On en déduit que $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

2°) $E = \left\{a^2+b^2, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

On peut remarquer que $E = \left\{a^2+b^2, (a, b) \in \mathbb{N}^2\right\}$.

a) **Démontrons que l'ensemble *E* est stable par produit.**

Soit N et N' deux éléments quelconques de E.

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $N = a^2+b^2$ et $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $N' = c^2+d^2$.

D'après l'identité de Lagrange, on a : $NN' = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

Or $(ac-bd) \in \mathbb{Z}$ et $(ad+bc) \in \mathbb{Z}$.

Donc NN' est bien la somme de deux carrés d'entiers relatifs.

On en déduit que le produit de deux éléments quelconques de E est encore un élément de E.

b) **En observant que $1105 = 13\times 85$ et que $1105 = 65\times 17$, démontrons que $1105 \in E$ et déterminons deux décompositions de 1105 comme sommes de deux carrés parfaits.**

• $1105 = 13\times 85$

$$\begin{aligned}13 &= 9+4\\ &= 3^2+2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}85 &= 81+4\\ &= 9^2+2^2\end{aligned}$$

$13 \in E$ et $85 \in E$ donc, E étant stable par produit, $1105 \in E$.

On applique l'identité de Lagrange avec $a=3$, $b=2$, $c=9$, $d=2$:

$$1105 = (3\times 9 - 2\times 2)^2 + (3\times 2 + 2\times 9)^2$$

$$\boxed{1105 = 23^2 + 24^2}$$

• $1105 = 65\times 17$

$$\begin{aligned}65 &= 49+16\\ &= 7^2+4^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}17 &= 16+1\\ &= 4^2+1^2\end{aligned}$$

$65 \in E$ et $17 \in E$ donc, E étant stable par produit, on retrouve que $1105 \in E$.

On applique l'identité de Lagrange avec $a=7$, $b=4$, $c=1$, $d=4$:

$$1105 = (7\times 1 - 4\times 4)^2 + (7\times 4 + 1\times 4)^2$$

$$\boxed{1105 = (-9)^2 + 32^2}$$

c) ***Facultatif***

Donnons un exemple d'éléments de *E* qui admet trois décompositions différentes comme sommes de deux carrés parfaits.

Dans l'exemple précédent, 65 peut se décomposer autrement : $65 = 8^2 + 1^2$.

Donc $1105 = (8^2+1^2)\times(4^2+1^2)$.

D'après l'identité de Lagrange,

$$1105 = (8\times 4 - 1\times 1)^2 + (8\times 1 + 4\times 1)^2$$

$1105 = 31^2 + 12^2$

Donc 1105 admet (au moins) trois décompositions différentes comme sommes de deux carrés parfaits :

$1105 = 23^2 + 24^2$

$1105 = 9^2 + 32^2$

$1105 = 31^2 + 12^2$

Autre décomposition :

$1105 = 4^2 + 33^2$

Pour savoir combien le nombre 1105 possède de décompositions comme somme de deux carrés parfaits, on peut réaliser un programme sur calculatrice.

Programme sur calculatrice TI pour savoir si un entier naturel est décomposable comme la somme de deux carrés parfaits

```
: Input "N = ", N
: √ N→ R
: For(I,1,R)
: For(J,I,R)
: If I² + J² = N
: Then
: Disp I, J
: Pause
: End
: End
: End
```

Grâce à ce programme, on constate qu'effectivement 1105 admet 4 décompositions comme somme de deux carrés parfaits.

Vincent Jacob :

En intervertissant l'ordre de a et de b (ou de c et de d) dans l'identité de Lagrange, on peut obtenir d'autres décompositions comme sommes de deux carrés parfaits.

Laura Quevilly-Navarette :

On doit trouver $N = A \times B$ avec A et B pouvant s'écrire sous deux formes différentes afin de créer plus de décompositions de N.
On remarque dans l'exemple précédent qu'un des deux facteurs est un nombre premier, ne pouvant s'écrire que sous la forme d'une seule somme de carrés parfaits.

On pose : $A = 65$ et $B = 85$.

On pose $N = 65 \times 85 = 5525$.

$65 = 8^2 + 1^2$ et $85 = 9^2 + 2^2$

$$\begin{aligned} N &= (8\times 9 - 1\times 2)^2 + (8\times 2 + 1\times 9)^2 \\ &= 70^2 + 25^2 \end{aligned}$$

$65 = 7^2 + 4^2$ et $85 = 6^2 + 7^2$

$$\begin{aligned} N &= (7\times 6 - 4\times 7)^2 + (7\times 7 + 4\times 6)^2 \\ &= 14^2 + 73^2 \end{aligned}$$

$65 = 8^2 + 1^2$ et $85 = 2^2 + 9^2$

$$\begin{aligned} N &= (2\times 8 - 9\times 1)^2 + (2\times 1 + 9\times 8)^2 \\ &= 7^2 + 74^2 \end{aligned}$$

$5525 = 70^2 + 25^2$

$5525 = 7^2 + 4^2$

$5525 = 6^2 + 7^2$

Nicolas Carteau :

$$5789 = 89\times 65 = (5^2 + 8^2)(4^2 + 7^2) = 36^2 + 67^2$$

$$5789 = 445\times 13 = (18^2 + 11^2)(3^2 + 2^2) = 32^2 + 69^2$$

$$5789 = 961\times 5 = (31^2 + 14^2)(2^2 + 1^2) = 48^2 + 59^2$$