Le quantificateur universel

Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons à la **quantification universelle**.
Quantifier ne va pas de soi. C'est une habitude à prendre. On doit quantifier dans le quotidien. Si on ne le fait pas, cela veut dire que l'on s'en fiche !

Objectifs : quantification d'égalités, d'inégalités, d'implications et d'équivalences (fait plus tard).

Plus précisément

- Savoir donner la valeur de vérité d'une phrase quantifiée dans des cas simples.

- Savoir nier (c'est-à-dire écrire la négation) d'une phrase quantifiée dans des cas simples.

- Comprendre un énoncé avec quantification cachée.

- Apprendre à quantifier correctement à bon escient.

- Introduire des quantificateurs de sa propre initiative.

- Prendre conscience de l'importance du quantificateur dans la rédaction (comprendre ce qu'apporte un quantificateur).

1. La quantification sert à former des propositions mathématiques.

→ *Exemple :*

Une phrase telle que « $x^2+1>0$ » a un sens mais n'a pas de valeur de vérité en soi, c'est-à-dire que l'on ne sait pas dire si la phrase est vraie ou fausse.

En revanche, la phrase « Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ » a un sens, et l'on peut dire qu'elle est vraie.

La phrase « $x^2+1>0$ » n'a pas de valeur de vérité. On dit que c'est un prédicat ou une phrase ouverte.

La phrase « Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$ » est une proposition mathématique.
Elle énonce une propriété générale vraie pour tous les réels x, (pas seulement pour des valeurs particulières x).
Elle permet de formuler une propriété qui s'applique à tous les réels.
On dit que c'est une proposition quantifiée (quantifiée par le « Pour tout … »). C'est le « Pour tout » qui donne la quantification.

→ *Bilan :*

La quantification traduite en français par « pour tout … » ou « quel que soit » permet de fabriquer une proposition mathématique à partir d'un prédicat.

Elle permet d'énoncer des propositions vraies en toute généralité c'est-à-dire pour tous les éléments d'un ensemble, sans exception.

2. Le quantificateur $\forall$

Plutôt que de rédiger une quantification en français, on peut recourir à un symbole mathématique de quantification. L'utilisation de ce symbole est régie par des règles qui seront données dans la suite.

→ ***Notation :***

Le quantificateur « quelque soit » ou « pour tout » se note $\forall$ (A à l'envers, le A venant de *Alle* qui signifie « tous » en allemand, notation due au mathématicien Peano).

→ ***Exemple d'utilisation :***

« $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 0$ »

3. Règles d'utilisation du quantificateur $\forall$

• Le quantificateur $\forall$ s'utilise toujours avant une égalité/inégalité. On n'a pas le droit de l'utiliser après.
Si on veut quantifier après une égalité, on est obligé de le faire en français.

• Si on veut écrire « pour tout x non nul », on écrira « $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ ».

• Le quantificateur lie la variable ; la variable apparaît comme **variable muette**.

→ *Exemple :*
La phrase « $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 0$ » peut aussi s'écrire « $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad t^2 + 1 > 0$ ».
On peut remplacer la variable x par n'importe quelle lettre.

• Après le symbole « appartient à », on écrit un ensemble qui a une grande importance. Il sert par exemple à préciser le domaine de validité d'une égalité/inégalité.
Cet ensemble s'appelle **le référentiel**.

→ *Exemple :*

La proposition « $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{x^2} = x$ » est vraie.
En revanche, elle n'est plus vraie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

• Il n'y a pas de virgule après le référentiel (cf. cours sur les virgules).

• On n'utilise pas le symbole « $\forall$ » dans une phrase.

→ *Exemple :*

On ne peut pas écrire « $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 1 > 0$ ».
En revanche, on peut écrire :

« On sait que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$ … » (avant les deux points, on a une proposition principale, après les deux points on a une proposition subordonnée).

→ *Bilan :*

Le quantificateur $\forall$ est suivi d'une variable puis du symbole $\in$ puis d'un ensemble appelé référentiel.
Il s'utilise avant une égalité ou une inégalité mais pas après.

4. Utilisations fréquentes

• Dans le cours

Toutes les propriétés sont quantifiées.

• En exercices

Dans le cadre algébrique-fonctionnel

→ Calculs algébriques

→ Calculs de dérivées

→ Sens de variations de suites

→ Les natures de suites

→ …

Dans tous ces cas, la quantification revêt une grande importance.

Dans le cadre géométrique

5. Utilisation dans les démonstrations

→ *Exemple :*

Démontrer que pour tout réel x on a $x^2+1 \geqslant 2x$.

Comment rédiger cette démonstration ?

Dans la démonstration, on va commencer par dire : « Soit x un réel quelconque »

On a : $x^2+1-2x=(x-1)^2$

Or $(x-1)^2 \geqslant 0$.

Donc $x^2+1 \geqslant 2x$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2+1 \geqslant 2x$.

Le quantificateur n'apparaît qu'à la fin puisque l'on n'a fait aucune hypothèse restrictive sur le *x* introduit au début (*x* est quelconque).

→ *Attention à ne pas introduire des quantificateurs lorsqu'il n'en faut pas !!!*

Exemple :

Soit x un réel fixé de $[0 ; 1]$.

Démontrer que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

Dans ce type d'exercice, il serait absurde de commencer en écrivant : « $\forall x \in [0 ; 1]$ » puisque l'énoncé fixe un x au départ.

6. Quantification cachée (ou implicite)

La quantification n'apparaît pas toujours explicitement. Il vaut mieux éviter cela quand on rédige.
Attention le quantificateur universel peut parfois se cacher, notamment quand on énonce une propriété en français.

Par exemple, quand on énonce la propriété « un entier pair est un entier multiple de 2 », l'article indéfini souligné « un » signifie en fait « tous les… ». Si on note **P** l'ensemble des entiers pairs, cette proposition s'énonce : « Pour tout n appartenant à **P**, n est multiple de 2 ».
Cependant, le mot « un » n'a pas toujours le rôle d'article indéfini. Dans la phrase, « un singleton est un ensemble ayant un élément, le deuxième « un » est un adjectif numéral. Il est souvent remplacé en mathématiques par « un et un seul ».

Autre exemple : un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

La quantification est souvent cachée dans les énoncés au niveau du collège formulés sous la forme « Si …, alors … » (cf. plus loin **10.**).
Au lycée, on évite de donner des propriétés quantifiées de manière cachée ; on aime mieux expliciter le plus possible la quantification.

7. Spécialisation

Si une phrase est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, alors elle est vraie pour des éléments particuliers de cet ensemble.

Lorsque l'on a une proposition formulée avec un quantificateur universel avec une variable numérique, il est possible de remplacer la variable liée au quantificateur par des valeurs particulières.

On rencontre fréquemment ce cas lorsque l'on applique une propriété du cours.

Exemple :

Le théorème de Pythagore est vrai pour tous les triangles rectangles.
En exercice, on l'applique à des triangles rectangles particuliers.

8. Phrases avec deux quantificateurs universels.

Exemple :

« $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \forall\, y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 \geqslant 0$ »

Les deux quantificateurs sont interchangeables. On peut donc écrire : « $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 \geqslant 0$ » ou plus simplement « $\forall \left(x\,;\,y\right) \in \mathbb{R}^2\ \ x^2 + y^2 \geqslant 0$ ».

9. Négation d'une phrase avec un quantificateur $\forall$

La négation d'une phrase de type « $\forall\, x \in \mathrm{E}\ \ p(x)$ » s'énonce « il existe x tel que non $p(x)$ ».

10. Quantification d'une implication

La quantification est souvent cachée.