TS spécialité

Contrôle du jeudi 12 décembre 2013 (50 min)

Prénom : …………………………………… **Nom :** …………………………………… ……. **/20**

I. (4 points)

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que l'on ait : $a < b$, $a + b = 56$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = 8$.
On écourtera les calculs de manière à se concentrer sur la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (4 points)

Soit n un entier naturel.

1°) Démontrer que $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=\text{PGCD}(n+4\,;19)$ (on privilégiera une méthode simple et efficace).

2°) En déduire le PGCD de $5n+1$ et de $n+4$ suivant les valeurs de n.

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

………..….

III. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les deux premiers termes sont $u_0=1$ et $u_1=1$ et qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout entier naturel n.

On admet que u_n est entier naturel pour tout entier naturel n.

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\text{PGCD}(u_{n+2}\,;u_{n+1})=\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n)$.

En déduire que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n.

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

IV. (2 points)

Soit a et b deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a\,;b)=21$.
Déterminer l'ensemble E des diviseurs entiers naturels communs à a et b. Citer la propriété utilisée.

$E=$ ……………………………………………………………

……..…..

……..…..

V. (2 points)

Pour tout entier naturel *n*, on pose $x_n = 2^n + 1$.
Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $2x_n - x_{n+1} = 1$ (une seule ligne de calcul) ; en déduire sans calcul $\text{PGCD}\left(x_n\ ;\ x_{n+1}\right)$.

……..…..

……..…..

VI. (4 points)

Démontrer de la manière la plus courte possible que, pour tout entier naturel *n*, *n* et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux. En déduire le PGCD de $n^3 + n$ et de $n^4 - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

Corrigé du contrôle du 12-12-2013

I.

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que l'on ait : $a<b$, $a+b=56$ et $\text{PGCD}(a\,;b)=8$.
On écourtera les calculs de manière à se concentrer sur la démarche.

$\text{PGCD}(a\,;b)=8$ donc on peut écrire $a=8a'$ et $b=8b'$ où a' et b' désignent des entiers naturels premiers entre eux.

$a+b=56$ donc $8(a'+b')=56$ soit $a'+b'=7$.

$a<b$ donc $a'<b'$.

Il faut écrire toutes les décompositions de 7 sous la forme d'une somme de deux entiers naturels et sélectionner celles qui correspondent à la condition des entiers naturels premiers entre eux.

Par suite, on a :

$a'=1$ et $b'=6$

ou

$a'=2$ et $b'=5$

ou

$a'=3$ et $b'=4$

On ne poursuit pas car a doit être inférieur à b d'où $a'<b'$.

Or $a=8a'$ et $b=8b'$ d'où :

$a=8$ et $b=48$

ou

$a=16$ et $b=40$

ou

$a=24$ et $b=32$

Après vérification, les couples solutions sont **(8 ; 48), (16 ; 40) et (24 ; 32)**.

II.

Soit n un entier naturel.
1°) Démontrer que $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=\text{PGCD}(n+4\,;19)$ (on privilégiera une méthode simple et efficace).
2°) En déduire le PGCD de $5n+1$ et de $n+4$ suivant les valeurs de n.

1°) On a : $5n+1=5(n+4)-19$ donc d'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=\text{PGCD}(n+4\,;-19)$.
Par suite, on a $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=\text{PGCD}(n+4\,;19)$.

2°) Soit d un diviseur commun positif à 19 et $n+4$.
On a donc $d \mid 19$ et $d \mid n+4$.

$d \mid 19 \Leftrightarrow d=1$ ou $d=19$ (car 19 est un nombre premier)

$$\begin{aligned} 19 \mid n+4 &\Leftrightarrow n+4=19k \text{ avec } k\in\mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow n=19k-4 \text{ avec } k\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

On a donc $\text{PGCD}(n+4\,;19)=19$ pour n de la forme $19k-4$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $\text{PGCD}(n+4\,;19)=19$ pour les autres valeurs de n.

Comme $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=\text{PGCD}(n+4\,;19)$, on peut dire que $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=19$ pour n de la forme $19k-4$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $\text{PGCD}(5n+1\,;n+4)=1$ pour les autres valeurs de n.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les deux premiers termes sont $u_0=1$ et $u_1=1$ et qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout entier naturel n.
On admet que u_n est entier naturel pour tout entier naturel n.
Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\text{PGCD}(u_{n+2}\,;u_{n+1})=\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n)$.
En déduire que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n.

Il s'agit de la suite de Fibonacci.
L'énoncé aurait dû dire que l'on admettait que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

On a : $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ donc d'après le lemme d'Euclide on a : $\text{PGCD}(u_{n+2}\,;u_{n+1})=\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n)$.

Méthode 1 :

On pose $v_n=\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n)$.
D'après ce que l'on vient de démontrer, la suite (v_n) est constante.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=v_0=1$.

Méthode 2 :

On effectue un raisonnement de proche en proche (ce qui est, en fait, à un raisonnement par récurrence non formalisé).

$$\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n)=\text{PGCD}(u_n\,;u_{n-1})=\text{PGCD}(u_{n-1}\,;u_{n-2})=...=\text{PGCD}(u_2\,;u_1)=\text{PGCD}(u_1\,;u_0)=1$$

On en déduit que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel *n*. Autrement dit, deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont toujours premiers entre eux.

IV.

Soit *a* et *b* deux entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a\,;b)=21$.
Déterminer l'ensemble *E* des diviseurs entiers naturels communs à *a* et *b*. Citer la propriété utilisée.

$$\boldsymbol{E=\{1\,;3\,;7\,;21\}}$$

Les diviseurs communs à deux entiers non tous les deux nuls sont les diviseurs du PGCD de ces nombres.

On peut écrire cette propriété sous la forme d'une égalité ensembliste : $\mathcal{D}^+(a)\cap\mathcal{D}^+(b)=\mathcal{D}^+[\text{PGCD}(a,b)]$.

V.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $x_n=2^n+1$.
Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $2x_n-x_{n+1}=1$ (une seule ligne de calcul) ; en déduire sans calcul $\text{PGCD}(x_n\,;x_{n+1})$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad 2x_n-x_{n+1}=2(2^n+1)-(2^{n+1}+1)=2^{n+1}+2-2^{n+1}-1=1$
Donc d'après le théorème de Bezout, $\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{PGCD}(x_n\,;x_{n+1})=1$.

La propriété démontrée exprime que deux termes consécutifs quelconques de la suite (x_n) sont premiers entre eux.

VI.

Démontrer de la manière la plus courte possible que, pour tout entier naturel n, n et n^2-1 sont premiers entre eux. En déduire le PGCD de n^3+n et de n^4-1 ($n \in \mathbb{N}$).

On a $n \times n-\left(n^2-1\right)=1$ avec $n \in \mathbb{N}$ donc, d'après le théorème de Bezout, n et n^2-1 sont premiers entre eux.

$$n^4-1=\left(n^2+1\right)\left(n^2-1\right)$$

$$n^3+n=n\left(n^2+1\right)$$

On a donc $\text{PGCD}\left(n^4-1\,;n^3+n\right)=\left(n^2+1\right)\times\text{PGCD}\left(n\,;\,n^2+1\right)=n^2+1$.

Autre méthode possible mais qui n'est pas du tout dans l'esprit de l'exercice :

On écrit un « faux » algorithme d'Euclide.

$$n^4-1=\left(n^3+n\right)n-n^2-1$$
$$n^3+n=\left(n^2+1\right)n+0$$

Donc … (fin du raisonnement à mettre en forme ; on utilise le lemme d'Euclide deux fois).

Autre méthode possible acceptable :

n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs donc ils sont premiers entre eux.

n et $n-1$ sont deux entiers consécutifs donc ils sont premiers entre eux.

Par conséquent, n et $(n+1)(n-1)$ sont premiers entre eux soit n et n^2-1 sont premiers.

On utilise la propriété suivante du cours :

> Soit a, b, c trois entiers relatifs.
>
> Si a est premier avec b et a est premier avec c, alors a est premier avec bc.