1$^{\text{ère}}$ S Nombre dérivé d'une fonction (1)

Le 4-3-2016

Fiche sur tangente surtout au début

→ bien donner le différentes motivations du chapitre

→ aspect TICE

Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la tangente à la courbe d'une fonction comme position limite des sécantes.

Nous allons approfondir l'étude en introduisant un nombre fondamental, le nombre dérivé d'une fonction, dont l'étude sera poursuivie durant plusieurs chapitres.

Il ne faut pas perdre de vue l'axe de travail (l'axe d'étude) des chapitres qui est de savoir déterminer avec précision une tangente.

On rentre dans la mathématisation (modélisation mathématique) du problème des tangentes évoquées dans le chapitre précédent, notamment avec la mise en œuvre des idées de Fermat.

Plan du chapitre

I. Exemple

……………………………………………………. a pour but de modéliser l'idée de Fermat sur un exemple

II. Nombre dérivé d'une fonction

…………………………………………………… a pour but de donner une « définition » du nombre dérivé

III. Tangente

………………………………… a pour but de donner la définition d'une tangente à l'aide du nombre dérivé

IV. Taux de variation

……………………………………………………… a pour but de préciser la notion de taux de variation

V. Cas particulier du taux de variation

……………………………… a pour but de donner la définition du rapport de Newton qui est très important

VI. Obtention du nombre dérivé

…………………………………… a pour but de préciser des moyens permettant d'obtenir un nombre dérivé

Cours du 14-10-2019

Définition 1 : f dérivable en a est nombre dérivé de f en a

Définition 2 : tangente à la courbe au point d'abscisse a

nombre dérivé de f en a $=$ coefficient de la tangente au point d'abscisse a

Définition 3 : taux de variation de f entre a et b étant des réels quelconques distincts $=$ par définition à $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ (coefficient directeur de la corde qui joint a et b)

Rappels sur le coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées [rappel]

Définition :

On considère une droite D non parallèle à des ordonnées.

D admet une unique équation de la forme $y = mx + p$.

m est appelé le coefficient directeur de la droite.

Autrement dit, le coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est le coefficient ou le nombre devant le x dans son équation réduite.

p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite.

m peut positif, négatif ou nul et cela donne « l'orientation » de la droite.
m donne « l'inclinaison » de la droite par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété (fondamentale) :

Dans le plan muni d'un repère, on considère deux points A et B n'ayant pas la même abscisse.

Le coefficient directeur de (AB) est égal à $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

I. Exemple

On reprend un exemple déjà étudié avec *Geogebra* dans le chapitre précédent.
Nous allons chercher à modéliser la situation étudiée « avec les mains » dans le chapitre précédent.

1°) Notations

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ (« fonction carré ») dans un repère.

On s'intéresse à la tangente au point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

2°) Étude

A $\left| \begin{array}{l} x_\mathrm{A} = 1 \\ y_\mathrm{A} = 1 \end{array} \right.$ (point fixe)

On note M un point mobile de $\mathcal{C}$ distinct de A.

Pour modéliser le problème, on va devoir travailler en littéral.

Pour cela, on note $1 + h$ l'abscisse de M où h est un réel non nul.

Le 1 de l'abscisse du point M se réfère à l'abscisse du point A (autrement dit, le 1 de l'abscisse du point M est donné en fonction de l'abscisse du point A).

Le h est non nul, positif ou négatif.

M $\left| \begin{array}{l} x_\mathrm{M} = 1 + h \\ y_\mathrm{M} = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 \end{array} \right.$ avec $h \neq 0$

La droite (AM) est appelée une sécante à la courbe.
Elle est sécante aux points A et M. On dit aussi que c'est une corde.

On va calculer le coefficient directeur de la droite (AM).

$$\frac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{1 + h - 1} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2 + h \quad (h \neq 0)$$

Les h « s'évanouissent »

Lorsque h se rapproche de 0, $2 + h$ se rapproche du nombre $\mathrm{L} = 2$ (cela revient à remplacer h par 0 en quelque sorte).

Autrement dit, lorsque M se rapproche de A, le coefficient directeur de la droite (AM) se rapproche de 2.
Donc la droite (AM) se rapproche de la droite passant par A et de coefficient directeur 2.
Cette droite, que nous nommerons T (puisque nous ne pouvons la nommer par un autre point), s'appelle la *tangente* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

On peut ainsi effectuer le tracé précis de cette tangente puisque l'on sait qu'elle passe par A et qu'elle a pour coefficient directeur $\mathrm{L} = 2$.
On peut alors tracer T avec précision sur le graphique (en oubliant d'ailleurs le point M).
On peut noter que le résultat obtenu précédemment par le calcul coïncide avec l'observation sur *Geogebra*.

3°) Vocabulaire

Le nombre $\mathrm{L} = 2$ qui est le nombre vers lequel se rapproche le coefficient directeur de (AM) et qui correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 est appelé *nombre dérivé* de f en 1.
On dira que : « le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à 2 » (ou, comme disent les élèves en raccourci : « le dérivé de f en 1 est égal à 2 »).

L'étude de ce nombre qui aura une grande importance dans tout le chapitre sera poursuivie dans les chapitres suivants.

4°) Généralisation

La méthode se généralise :

- en tous les points de la courbe $\mathcal{C}$;

- à d'autres fonctions.

II. Nombre dérivé d'une fonction

Dans ce paragraphe, nous allons passer à un cadre plus général et plus abstrait dans lequel l'expression de f n'est pas connue.

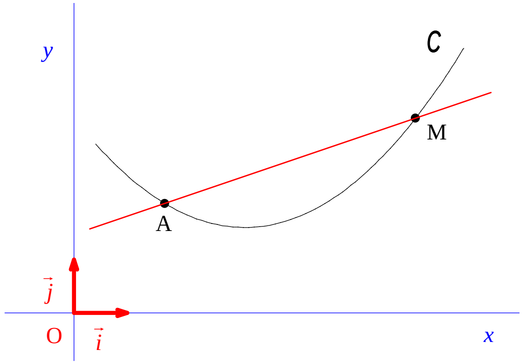
1°) Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de *f* dans un repère.

A est un point fixe de $\mathcal{C}$ d'abscisse *a* ($a \in$ I).

M est un point variable de $\mathcal{C}$ distinct de A.



Dans les situations que nous rencontrerons dans ce chapitre, le coefficient directeur de la droite mobile (AM) se rapproche d'un nombre L.

On dit alors que :

- la fonction *f* est **« dérivable »** en *a* ;

- le nombre L est le **« nombre dérivé »** de *f* en *a*.

2°) Remarques

L'expression « nombre dérivé » est à prendre d'un bloc.

Cette définition sera reprise dans le chapitre suivant. Il s'agit donc d'une définition provisoire et non de la définition « officielle » qui sera donnée plus tard. C'est pourquoi il faudrait mettre le mot définition entre guillemets.

On notera que l'on ne voit pas L apparaître sur le graphique. Dans le paragraphe suivant, nous allons donner une interprétation « concrète » de L avec la notion de tangente.

Les élèves disent parfois à l'oral « le dérivé de *f* en *a* ». C'est un abus qu'il vaut mieux ne pas s'autoriser.
On doit dire « nombre dérivé » de *f* en *a*.

Le réel L peut être positif, négatif ou nul.

3°) Retour sur l'exemple du I

L'étude que nous avons menée en 1 pour la fonction « carré » peut être adaptée en tout autre réel autre que 1.
La fonction « carré » admet un nombre dérivé en tout réel.
On obtiendra chaque fois un nombre différent.

Très vite nous allons chercher des formules générales permettant d'obtenir le nombre dérivé en n'importe quel réel.

Cette deuxième remarque peut être insérée dans nombre dérivé (1) ou nombre dérivé (2).

4°) Obtention du nombre dérivé

La notion de nombre dérivé sera précisée à la fin du chapitre et dans les chapitres ultérieurs.

Dans le paragraphe **V**, nous verrons différents moyens d'obtenir le nombre dérivé.

Dans le chapitre suivant, nous reprendrons la technique mise en œuvre dans l'exemple du paragraphe **I**.

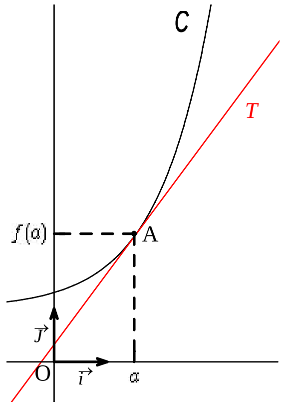
III. Tangente

Avec la notion de nombre dérivé, il est possible de donner une définition précise de la tangente à la courbe en un point. Du même coup, on obtient une interprétation concrète du nombre dérivé d'une fonction en un réel.

1°) Définition

On reprend les notations du paragraphe précédent avec la condition de dérivabilité de la fonction *f* en *a*.

On appelle **tangente** à $\mathcal{C}$ en A la droite *T* passant par A et de coefficient directeur L (nombre dérivé de *f* en *a*).



Cette définition permet d'établir une conséquence de la dérivabilité d'une fonction en un réel : la courbe possède une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.

2°) Lien entre nombre dérivé et coefficient directeur de la tangente

Cette définition sera reprise dans les chapitres suivants lorsque nous préciserons la notion de nombre dérivé.

On retiendra cependant dès à présent le lien fondamental très fort entre nombre dérivé et coefficient directeur qui résulte de la définition.

nombre dérivé de *f* en *a* = coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse *a*

Ce lien très important sera constamment utilisé.

3°) Quelques remarques

- Si l'on connaît la tangente, alors on connaît le nombre dérivé.

- Si l'on connaît le nombre dérivé, alors on peut tracer la tangente.

4°) Tracé d'une tangente connaissant le nombre dérivé

On se ramène à la construction d'une droite connaissant un point et son coefficient directeur.

On peut par ailleurs noter que le tracé approximatif de la tangente permet de connaître une valeur approchée du nombre dérivé.

IV. Taux de variation

Dans ce paragraphe, nous allons nous placer dans une optique où l'expression de f est connue.
Nous allons nous intéresser de plus près au rapport de Newton qui aura un grand rôle pour déterminer le nombre dérivé.

1°) Définition [taux de variation]

f est une fonction.

a et *b* sont deux réels quelconques de l'ensemble de définition de *f*.

On appelle **taux de variation de *f*** le quotient $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^2$

Calculer le taux de variation de *f* entre 2 et 4.

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{4^2-2^2}{2}=\frac{16-4}{2}=6$$

On pourra noter l'analogie avec la formule vue en SES : $\dfrac{\text{valeur d'arrivée} - \text{valeur de départ}}{\text{valeur de départ}}$.

3°) Interprétation géométrique

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de *f* dans un repère.

Le taux de variation de *f* entre *a* et *b* est égal au coefficient directeur de la corde qui joint *a* et *b*.

V. Cas particulier du taux de variation

1°) Définition (un quotient important)

Le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé le **taux de variation de *f*** entre *a* et $a+h$ (ou **« rapport de Newton »** de *f* en *a*).

2°) Utilisation

Ce quotient aura une grande importance dans les chapitres suivants.
Il nous servira à déterminer par le calcul (c'est-à-dire à calculer) un nombre dérivé « à la main » comme nous l'apprendrons dans le chapitre suivant.

3°) Interprétation géométrique

Le rapport de Newton s'interprète aisément dans le cadre géométrique.

En effet, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ représente le coefficient directeur de la droite (AM) où A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse *a* et M le point d'abscisse $a+h$.

4°) Autres interprétations du rapport de Newton

Ce rapport de Newton peut s'interpréter autrement dans d'autres contextes avec des grandeurs (notamment la vitesse en physique, comme nous le verrons plus tard).

5°) Simplification (« évanouissement des *h* »)

Dans le paragraphe **I** avec la « fonction carré », on a constaté que les *h* se simplifiaient dans le quotient.
Cette observation se généralise.

En pratique, pour des fonctions polynômes ou rationnelles, le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être simplifié de sorte que le *h* du dénominateur disparaisse par simplification.
On dit alors que l'on a obtenu la **forme simplifiée** de ce quotient. C'est à partir de cette forme que nous travaillerons (voir exercices).

On disait au XVIIe siècle que les *h* « s'évanouissent » (cela a beaucoup frappé les gens à l'époque à tel point qu'ils ont employé ce terme et ont parlé de « quantités évanescentes » à la suite de Leibniz ; Newton parlaient quant à lui de « quantités fluentes »).

Autre formulation :

Pour beaucoup de fonctions (polynômes ou rationnelles en particulier), le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être simplifié (par les moyens algébriques ordinaires : développements, factorisations…) de sorte que le h du dénominateur disparaisse (le calcul peut être plus ou moins long et plus ou moins difficile).

On dit que les « h » disparaissent mais il en reste quand même !

6°) Calcul et simplification d'un rapport de Newton

On travaille en littéral.
On doit respecter une organisation rigoureuse des calculs.
En pratique, on applique le principe de séparation des calculs.
On calcule séparément $f(a)$ puis $f(a+h)$, puis enfin $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Comme nous venons de le dire, on observe un « évanouissement » des h pour les fonctions algébriques étudiées dans ce chapitre permettant d'obtenir une expression simplifiée du rapport de Newton (c'est-à-dire avec simplification du h au dénominateur).

L'expression simplifiée se présente de manière plus ou moins compliquée, il peut s'agir d'un quotient ou non.

Dans les chapitres suivants, nous travaillerons toujours à partir de la forme simplifiée de ce rapport.

VI. Obtention d'un nombre dérivé

1°) « À la main »

Il s'agit d'un calcul à partir du rapport de Newton. Nous verrons ce calcul dans les chapitres suivants.

2°) À la calculatrice

On peut tracer la courbe puis la tangente ou utiliser directement une commande spéciale pour le nombre dérivé.
On doit respecter la syntaxe.
On va chercher le nombre dérivé de la fonction « carré » en 1 (qui est égal à 2).

- Pour les modèles TI :

1ère méthode :

On tape [math] puis 8.

Selon les modèles, on obtient :

nombreDérivé(, ,) ou nDeriv(, ,) (TI 83-Plus)

fonction variable nombre en lequel on cherche le nombre dérivé

nombreDérivé(X^2, X, 1) ou nDeriv(X^2, X, 1)

ou

$\dfrac{d}{d\square}\left(\square\right)\Big|_{x=\square}$ avec des petits carrés en pointillés qu'il faut compléter.

X expression de la fonction (avec X) un nombre réel

$$\frac{d}{d\boxed{X}}\left(\boxed{X^2}\right)\Big|_{x=\boxed{1}}$$

Cette notation provient de la notation de Newton qui sera expliquée plus tard (pour l'instant, ne pas chercher à comprendre).

On écrit la lettre X en appuyant sur les touches [alpha] et [sto →].

On peut utiliser une autre lettre que X (Y, T…).

Par exemple, nDeriv(Y^2, Y, 1).

En effet, il s'agit d'une variable « muette » qu'on peut remplacer par n'importe quelle autre lettre.
En physique, la variable est souvent le temps t ; nous le verrons plus tard dans le chapitre sur l'application de la dérivation à la cinématique (vitesse et accélération).

2e méthode :

On trace d'abord la courbe représentative de la fonction.

On fait [2nde] [trace] (calculs) puis on choisit 6 : dy/dx.

On appuie sur [entrer] puis on rentre le nombre.

Sur calculatrice **TI 83 Premium CE**

Faire [2nde] puis la touche avec une barre de fraction $\dfrac{\square}{\square}$ et enfin, choix $\dfrac{d}{d\square}\left(\square\right)\Big|_{\square}$.

- Pour les modèles Casio :

En faisant

[OPTN] [F4] (CALC) [F2] (d/dx) d/dx (x^2, x, 1)

on obtient le nombre dérivé de la fonction « carré » en 1 (qui est égal à 2).

Remarques :

- Il faut signaler que le résultat obtenu n'est pas toujours précis.

La calculatrice donne en général une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction en un réel.

• On peut faire le lien avec le tracé de la tangente sur la calculatrice ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{prgm}}$). Celle-ci permet d'obtenir l'équation réduite en bas de l'écran. Le nombre dérivé est égal ai coefficient directeur.
C'est donc un autre moyen d'obtenir le nombre dérivé, qui nécessite cependant d'avoir tracé préalablement le courbe de la fonction.

Le lundi 3 décembre 2018 (et le mercredi 12 décembre 2018)

Quelques anomalies sur la calculatrice TI-83 Premium CE

• La calculatrice donne l'axe des abscisses comme tangente à l'origine à la courbe de la fonction « valeur absolue ». La calculatrice utilise certainement la notion de « dérivée symétrique » qui n'est pas au programme du lycée.

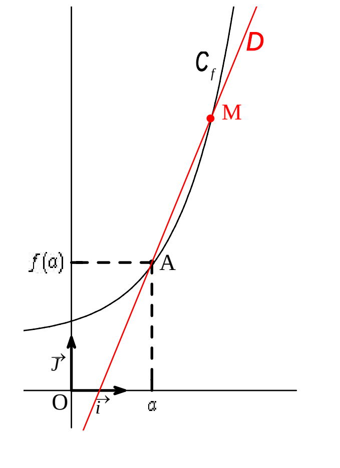
• Quand on demande de tracer la tangente à l'origine de la fonction « racine carrée », on obtient le message :

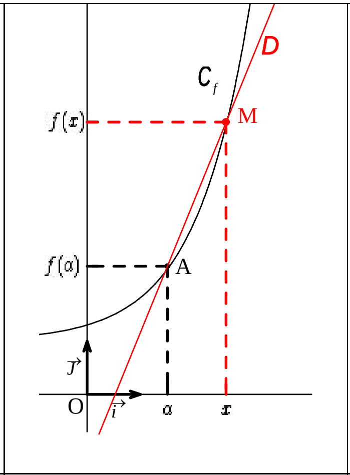
ERREUR RÉSULT. NON RÉELS

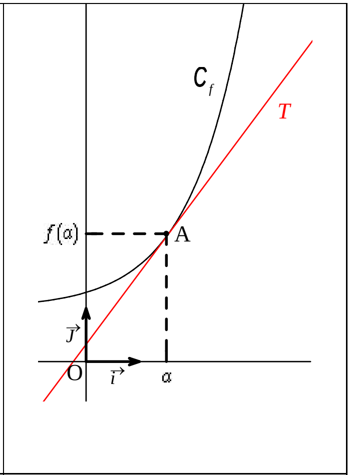
Les décimales erronées dans le résultat d'un nombre dérivée viennent du mode de calcul : elle utilise la notion de « dérivée symétrique » (notion qui n'est pas étudiée au lycée).

3°) Logiciel de calcul formel

Résumé du chapitre







(AM) est sécante à la courbe. Coefficient directeur de (AM) $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	M n'est plus statique mais mobile. (AM) pivote autour de A.	Quand M se rapproche de A. La droite (AM) tend à être tangente en A à la courbe.

On observera le jeu de cadre omniprésent dans ce chapitre : passage du cadre numérique-algébrique au cadre géométrique-graphique.

• Nombre dérivé d'une fonction

Le nombre dont se rapproche le coefficient directeur de la droite (AM) quand M se rapproche de A.

• Définition de la tangente

droite	passant par A admettant pour coefficient directeur le nombre dérivé de *f* en *a*

• Lien entre nombre dérivé d'une fonction et coefficient directeur de la tangente

Le nombre dérivé de *f* en *a* est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction *f* au point d'abscisse *a*.

• Taux de variation de *f* entre *a* et $a+h$ (rapport de Newton)

Ce rapport aura un rôle central dans les chapitres suivants.
Ce rapport nous permettra de déterminer un nombre dérivé par un calcul « à la main ».

• Obtention du nombre dérivé sur calculatrice ou sur logiciel de calcul formel

Extrait du livre « Les mots et les maths » de Bernard Hauchechorne page 69

Dérivée

On peut dire qu'il existe deux verbes *dériver* en français. La confusion des deux a modifié leur sens respectifs et il n'est pas toujours facile de savoir lequel on emploie.
L'un vient du latin *derivare*. On y retrouve le préfixe *de-* et la racine *rivus* d'où découle notre ruisseau et notre rive. Il signifie détourner un cours d'eau. On a conservé ce sens dans le mot français dérivation.
L'autre est emprunté vers 1400 par le gascon à l'anglais. Déformation de *to drive*, il signifie *passer devant soi, conduire.* Il passe en français au milieu du XVIe siècle. Par influence du premier mais aussi du mot *rive,* il prend le sens d'*emporté par le vent* ou *par le courant*.
Il semble que la dérivée en mathématiques découle plutôt du premier. L'introduction de ce terme sous–tend l'idée que la dérivée provient de la fonction elle-même. L'acception mathématique du mot est introduite par Leibniz en 1677. L'utilisation du mot *dérivation* et du verbe *dériver* suit peu après.

Le vendredi 2 décembre 2016

Nous avons parlé des « produits dérivés ». Un élève a donné l'exemple de peluches à l'occasion de la sortie d'un film.