1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 29 novembre 2013 (30 min)

Prénom : ………………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

Barème :

exercice	1	2	3	4	5	6
sur	1	3	2	7	3	4

1 Déterminer l'abscisse du point d'intersection A des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = \dfrac{2}{x}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donnera la valeur exacte.

$x_{\text{A}} =$ ....

2 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Γ l'ensemble des points $\text{M}(x\,;y)$ du plan tels que $y^2 - x^2 = 1$.

1°) Compléter le raisonnement suivant :

Soit $\text{M}(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

$\text{M} \in \Gamma$ si et seulement si $y^2 =$ ....

si et seulement si $y =$ .... ou $y =$ ....

2°) On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$ les courbes d'équations respectives $y = \sqrt{x^2+1}$ et $y = -\sqrt{x^2+1}$.

a) Exprimer Γ à l'aide de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$.

Γ est ……………………………………………………………………………………………………..

b) Traduire le a) mathématiquement en complétant l'égalité ci-dessous (on notera qu'il s'agit d'une égalité d'ensembles).

$\Gamma =$ ....

Visualiser Γ sur l'écran de sa calculatrice.

3 On considère un triangle du plan dont l'aire est égale à 4 cm^2. On note b la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur relative à ce côté, ces deux longueurs étant exprimées en cm.

Est-il vrai que b et h sont inversement proportionnels ? Justifier brièvement.

………..

………..

4 Deux frères, Tim et Tom organisent chacun une tombola.

Tim propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent :
1 lot de 250 €, 4 lots de 50 € et 25 lots de 2 €.

Tom propose également 100 billets, mais annonce 50 gagnants :
5 lots de 20 €, 10 lots de 15 €, 15 lots de 10 € et 20 lots de 5 €.

Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 €. Soit X le gain algébrique en euro lié à l'achat d'un billet chez Tim et Y celui lié à l'achat d'un billet chez Tom.

1°) Donner les lois de probabilités de X et Y. On pensera à tenir compte de la mise pour déterminer les valeurs. On donnera les probabilités sous forme décimale.

x_i		
$P(\text{X} = x_i)$		Total $= 1$

y_i		
$P(\text{Y} = y_i)$		Total $= 1$

2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X et Y (valeurs arrondies au centième).
La formule n'est pas demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

$E(\text{X}) =$ .... $E(\text{Y}) =$ ....

$\sigma(\text{X}) \approx$ .... (valeur arrondie au centième) $\sigma(\text{Y}) \approx$ .... (valeur arrondie au centième)

3°) Que pourrait-on conseiller à Françoise qui hésite entre les deux tombolas, sachant qu'elle n'aime pas le goût du risque ? Justifier.

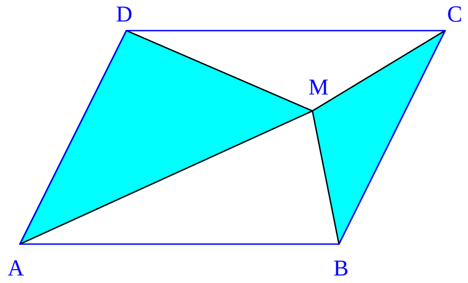
………..

………..

………..

………..

5 Un élève a dû résoudre l'exercice suivant en devoir :

> Soit ABCD un parallélogramme.
> Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du parallélogramme.
>
> 
>
>
> Laquelle des deux aires (colorée : triangles BCM et ADM ; blanche : triangles ABM et CDM) est la plus grande ?

1°) Il a d'abord réalisé une figure dynamique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique de telle sorte que M soit mobile. Il a ensuite observé comment variaient les aires lorsqu'il faisait « bouger » M à l'intérieur du parallélogramme.
Sur sa copie, il a écrit : « Il semble que les deux aires soient égales ».

Comment appelle-t-on ce type d'affirmation ?

Ce type d'affirmation s'appelle ………………………………………………………. .

2°) Pourquoi l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne constitue pas une démonstration du résultat ?

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

3°) Dans la rédaction de sa démonstration, l'élève a utilisé et cité la propriété suivante : « Une diagonale d'un parallélogramme *coupe* celui-ci en deux triangles de même aire ».

Le verbe couper, écrit en italique, ne convient pas. Proposer un verbe correct et réécrire la propriété.

…………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

6 1°) On rappelle que la partie entière d'un réel *a* est l'entier relatif noté $\mathrm{E}(a)$ tel que $\mathrm{E}(a) \leqslant a < \mathrm{E}(a)+1$.
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x) = \mathrm{E}(x+0,75)$.

a) Soit *x* un réel quelconque dans l'intervalle [0 ; 0,25[.
On se propose de déterminer l'image de *x* par *f*.

Compléter le raisonnement suivant :

On a $0 \leqslant x < 0,25$ donc $\ldots\ldots \leqslant x+0,75 < \ldots\ldots$

Donc $f(x) = $ ....

b) Reprendre la même démarche pour un réel *x* quelconque dans l'intervalle [0,25 ; 1[.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

2°) On veut faire une simulation d'une expérience aléatoire au tableur afin d'obtenir des échantillons.
Pour cela, on entre dans une cellule la formule : = ENT(ALEA( ) + 0,75) .
On rappelle que la fonction ENT désigne la partie entière et que la fonction ALEA permet d'afficher un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.

a) Quels nombres peuvent apparaître dans cette cellule ?

Les nombres qui peuvent apparaître dans cette cellule sont ………………………….. .

b) On recopie 10 000 fois cette formule. Quelle est la fréquence « théorique » à laquelle apparaît chacun de ces nombres ? Donner le résultat en fraction sans justifier.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Versions sèches de l'exercice $\boxed{6}$

Version 1

1°) On rappelle que la partie entière d'un réel a est l'entier relatif noté $\mathrm{E}(a)$ tel que $\mathrm{E}(a) \leqslant a < \mathrm{E}(a)+1$.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x) = \mathrm{E}(x+0,75)$.

Déterminer $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) On veut faire une simulation d'une expérience aléatoire au tableur afin d'obtenir des échantillons.
Pour cela, on entre dans une cellule la formule : $\boxed{\text{= ENT(ALEA( ) + 0,75)}}$.
On rappelle que la fonction ENT désigne la partie entière et que la fonction ALEA permet d'afficher un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.

a) Quels nombres peuvent apparaître dans cette cellule ?
b) On recopie 10 000 fois cette formule. Quelle est la fréquence « théorique » à laquelle apparaît chacun de ces nombres ? Donner le résultat en fraction sans justifier.

Version 2

On veut faire une simulation d'une expérience aléatoire au tableur afin d'obtenir des échantillons.
Pour cela, on entre dans une cellule la formule : $\boxed{\text{= ENT(ALEA( ) + 0,75)}}$.
On rappelle que la fonction ENT désigne la partie entière et que la fonction ALEA permet d'afficher un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.

1°) Quels nombres peuvent apparaître dans cette cellule ?

2°) On recopie 10 000 fois cette formule.
Quelle est la fréquence « théorique » à laquelle apparaît chacun de ces nombres ? Donner le résultat en fraction sans justifier.

Corrigé

1 Déterminer l'abscisse du point d'intersection A des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = \dfrac{2}{x}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donnera la valeur exacte.

$$x_{\mathrm{A}} = \sqrt[3]{2}$$

2 Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Γ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan tels que $y^2 - x^2 = 1$.

1°) Compléter le raisonnement suivant :

Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

$\mathrm{M} \in \Gamma$ si et seulement si $y^2 = x^2 + 1$

si et seulement si $y = \sqrt{x^2+1}$ ou $y = -\sqrt{x^2+1}$

2°) On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes d'équations respectives $y = \sqrt{x^2+1}$ et $y = -\sqrt{x^2+1}$.

a) Exprimer Γ à l'aide de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Γ est la réunion de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

On peut dire que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses si le repère est orthogonal mais ce n'était pas demandé.

Formulation incorrecte :

E est l'ensemble des points appartenant à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

b) Traduire le a) mathématiquement en complétant l'égalité ci-dessous (on notera qu'il s'agit d'une égalité d'ensembles).

$$\Gamma = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$$

On ne met ni crochets, ni accolades.

Une mauvaise formulation serait de dire : « Γ est l'ensemble de points appartenant à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$ ».

Visualiser Γ sur l'écran de sa calculatrice.

3 On considère un triangle du plan dont l'aire est égale à $4\ \text{cm}^2$. On note b la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur relative à ce côté, ces deux longueurs étant exprimées en cm.
Est-il vrai que b et h sont inversement proportionnels ? Justifier brièvement.

On a $\dfrac{b \times h}{2} = 4$ donc $b \times h = 8$.
Par suite, b et h sont inversement proportionnels.

On pourrait aussi écrire $b = \dfrac{8}{h}$ et $h = \dfrac{8}{b}$, mais ces relations sont inutiles pour justifier que b et h sont inversement proportionnels.

4 Deux frères, Tim et Tom organisent chacun une tombola.

Tim propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent :
1 lot de 250 €, 4 lots de 50 € et 25 lots de 2 €.

Tom propose également 100 billets, mais annonce 50 gagnants :
5 lots de 20 €, 10 lots de 15 €, 15 lots de 10 € et 20 lots de 5 €.

Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 €. Soit X le gain algébrique en euro lié à l'achat d'un billet chez Tim et Y celui lié à l'achat d'un billet chez Tom.

1°) Donner les lois de probabilités de X et Y. On pensera à tenir compte de la mise pour déterminer les valeurs. On donnera les probabilités sous forme décimale.

x_i	245	45	-3	-5	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	0,01	0,04	0,25	0,7	Total = 1

y_i	15	10	5	0	-5	
$P(\mathrm{Y} = y_i)$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5	Total = 1

2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X et Y (valeurs arrondies au centième).
La formule n'est pas demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

Avec la calculatrice, on obtenait immédiatement les valeurs suivantes :

$E(\mathrm{X}) = 0$ $\qquad$ $E(\mathrm{Y}) = 0$

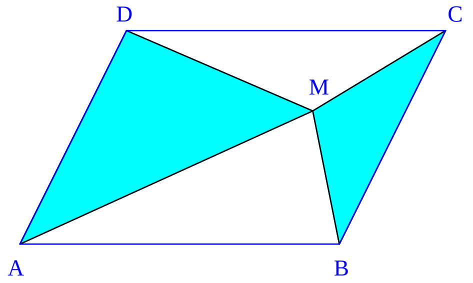
$\sigma(\mathrm{X}) \approx 26,48$ (valeur arrondie au centième) $\qquad$ $\sigma(\mathrm{Y}) \approx 6,12$ (valeur arrondie au centième)

3°) Que pourrait-on conseiller à Françoise qui hésite entre les deux tombolas, sachant qu'elle n'aime pas le goût du risque ? Justifier.

On a $E(\mathrm{X}) = E(\mathrm{Y}) = 0$ et $\sigma(\mathrm{X}) > \sigma(\mathrm{Y})$ donc le jeu est équitable mais il vaut mieux conseiller à François la tombola de Tom car le risque sera moins élevé qu'avec la tombola de Tim.

5 Un élève a dû résoudre l'exercice suivant en devoir :

Soit ABCD un parallélogramme.
Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du parallélogramme.



Laquelle des deux aires (colorée : triangles BCM et ADM ; blanche : triangles ABM et CDM) est la plus grande ?

Il s'agit d'un exercice de travail sur la rédaction.

1°) Il a d'abord réalisé une figure dynamique à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique de telle sorte que M soit mobile. Il a ensuite observé comment variaient les aires lorsqu'il faisait « bouger » M à l'intérieur du parallélogramme.
Sur sa copie, il a écrit : « Il semble que les deux aires soient égales ».

Comment appelle-t-on ce type d'affirmation ?

Ce type d'affirmation s'appelle **une conjecture**.

Attention, ce n'est pas une hypothèse, comme certains élèves l'ont écrit.
Le mot hypothèse a un sens tout à fait différent en mathématiques.

2°) Pourquoi l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne constitue pas une démonstration du résultat ?

Il y a deux rasions principales :

- impossibilité de faire occuper à M toutes les positions possibles à l'intérieur du parallélogramme ;

- nombre fini de décimales affichées.

3°) Dans la rédaction de sa démonstration, l'élève a utilisé et cité la propriété suivante : « Une diagonale d'un parallélogramme *coupe* celui-ci en deux triangles de même aire ».

Le verbe couper, écrit en italique, ne convient pas. Proposer un verbe correct et réécrire la propriété.

partage

« Une diagonale d'un parallélogramme *partage* celui-ci en deux triangles de même aire ».

Les mots diviser, couper, séparer ne conviennent pas.
Le mot diviser concerne essentiellement l'opération.

6 1°) On rappelle que la partie entière d'un réel *a* est l'entier relatif noté $\mathrm{E}(a)$ tel que $\mathrm{E}(a) \leqslant a < \mathrm{E}(a)+1$.
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x) = \mathrm{E}(x+0,75)$.

a) Soit *x* un réel quelconque dans l'intervalle [0 ; 0,25[.
On se propose de déterminer l'image de *x* par *f*.

Compléter le raisonnement suivant :

On a $0 \leqslant x < 5,25$ donc $0,75 \leqslant x+0,75 < 1$.

Donc $f(x) = 0$.

b) Reprendre la même démarche pour un réel *x* quelconque dans l'intervalle [0,25 ; 1[.

On a $0,25 \leqslant x < 1$ donc $1 \leqslant x+0,75 < 1,75$.

Donc $f(x) = 1$.

On peut dire que la fonction *f* est constante par intervalles.

2°) On veut faire une simulation d'une expérience aléatoire au tableur afin d'obtenir des échantillons.
Pour cela, on entre dans une cellule la formule : = ENT(ALEA( ) + 0,75) .
On rappelle que la fonction ENT désigne la partie entière et que la fonction ALEA permet d'afficher un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[.

a) Quels nombres peuvent apparaître dans cette cellule ?

Les nombres qui peuvent apparaître dans cette cellule sont 0 et 1.

b) On recopie 10 000 fois cette formule. Quelle est la fréquence « théorique » à laquelle apparaît chacun de ces nombres ? Donner le résultat en fraction sans justifier.

0 apparaît avec la fréquence « théorique » $\dfrac{1}{4}$.

1 apparaît avec la fréquence « théorique » $\dfrac{3}{4}$.

0 apparaît lorsque le nombre au hasard appartient à [0 ; 0,25[et $0,25-0=\dfrac{1}{4}$.

1 apparaît lorsque le nombre au hasard appartient à [0,25 ; 1[et $1-0,25=\dfrac{3}{4}$.