TS1 Spé

Devoir pour le lundi 25 novembre 2013

Une urne contient 7 jetons rouges, 5 verts, 3 jaunes. On extrait deux jetons de l'urne :

• s'ils sont de même couleur, on les remet dans l'urne ;

• s'ils sont de couleurs différentes, on les remplace dans l'urne par deux jetons de la couleur non obtenue.

Par exemple, si on tire un jeton rouge et un jeton vert, on les remplace par deux jetons jaunes.

On se propose de savoir si, au bout d'un nombre suffisant de tirages, il est possible que tous les jetons de l'urne aient la même couleur.

Pour cela, on note r_k, v_k et j_k le nombre respectif de jetons rouges, verts et jaunes après le k-ième tirage et replacement des jetons dans l'urne selon la règle indiquée ($k \geqslant 1$).

1°) Exprimer $r_{k+1} - v_{k+1}$ en fonction de $r_k - v_k$ lorsqu'au (k + 1)-ième tirage on a extrait puis replacé les jetons selon la règle :

a) deux jetons de même couleur ;
b) un jeton rouge et un jeton vert ;
c) un jeton rouge et un jeton jaune ;
d) un jeton vert et un jeton jaune.

2°) a) Démontrer que $r_{k+1} - v_{k+1} \equiv r_k - v_k \ [3]$.
b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $r_n - v_n \equiv 2 \ [3]$.

3°) a) Après le n-ième tirage et le replacement de deux jetons selon la règle, quelles seraient les valeurs possibles de $r_n - v_n$ si tous les jetons étaient de même couleur ?
b) Conclusion : tous les jetons de l'urne peuvent-ils être de la même couleur ?

Corrigé du DM pour le 25-11-2013

1°) **Exprimons $r_{k+1}-v_{k+1}$ en fonction de r_k-v_k lorsqu'au $(k+1)$-ième tirage on a extrait puis replacé les jetons selon la règle :**

a) deux jetons de même couleur ;

Si l'on tire deux jetons de même couleur, on les replace dans l'urne. A la fin du k-ième tirage et du $(k+1)$-ième tirage, la composition de l'urne reste donc identique. Donc $r_{k+1}=r_k$ et $v_{k+1}=v_k$.
D'où $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k-v_k$.

b) un jeton rouge et un jeton vert ;

Dans ce cas de figure, les jetons rouges et verts sont retirés de l'urne et remplacés par deux jetons jaunes. Au $(k+1)$-ième tirage, il y aura donc un jeton rouge de moins et un jeton vert de moins qu'au k-ième. Donc $r_{k+1}=r_k-1$ et $v_{k+1}=v_k-1$. D'où $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k-1-(v_k-1)=r_k-v_k$.

c) un jeton rouge et un jeton jaune ;

Dans ce cas de figure, les jetons rouge et jaune sont retirés de l'urne et remplacés par deux jetons verts. Au $(k+1)$-ième tirage, il y aura donc un jeton rouge de moins et deux jetons verts de plus qu'au k-ième. Donc $r_{k+1}=r_k-1$ et $v_{k+1}=v_k+2$. D'où $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k-1-(v_k+2)=(r_k-v_k)-3$.

d) un jeton vert et un jeton jaune.

Dans ce cas de figure, les jetons jaunes et verts sont retirés de l'urne et remplacés par deux jetons rouges. Au $(k+1)$-ième tirage, il y aura donc deux jetons rouges de plus et un jeton vert de moins qu'au k-ième. Donc $r_{k+1}=r_k+2$ et $v_{k+1}=v_k-1$. D'où $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k+2-(v_k-1)=(r_k-v_k)+3$.

2°) a) **Démontrer que $r_{k+1}-v_{k+1}\equiv r_k-v_k\ \ [3]$.**

Lors du $(k+1)$-ième tirage, soit on pioche deux jetons de la même couleur, soit on pioche un jeton rouge et un jeton vert, soit un jeton rouge et un jeton jaune, soit un jeton jaune et un jeton vert.
On a donc $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k-v_k$ ou $r_{k+1}-v_{k+1}=(r_k-v_k)-3$ ou $r_{k+1}-v_{k+1}=(r_k-v_k)+3$.
Si $r_{k+1}-v_{k+1}=r_k-v_k$ alors $r_{k+1}-v_{k+1}\equiv r_k-v_k$ [3].
Si $r_{k+1}-v_{k+1}=(r_k-v_k)-3$, alors $r_{k+1}-v_{k+1}\equiv r_k-v_k$ [3] (car $-3\equiv 0$ [3]).
Si $r_{k+1}-v_{k+1}=(r_k-v_k)-3$, alors $r_{k+1}-v_{k+1}\equiv r_k-v_k$ [3] (car $3\equiv 0$ [3]).
Donc quel que soit le tirage, on a $r_{k+1}-v_{k+1}\equiv r_k-v_k$ [3].

b) **Déduisons-en que pour tout entier naturel non nul n, $r_n-v_n\equiv 2\ \ [3]$.**

Pour k entier naturel non nul, on définit la phrase $P(k)$: « $r_k-v_k\equiv 2$ [3] ».
Vérifions que $P(1)$ est vraie.

A l'état initial, la différence entre le nombre de jetons rouges et de jetons verts est de 2.
Or $2-2=0$ et $3\mid 0$; donc, à l'état initial, la différence entre le nombre de jetons rouges et celui de jetons verts est congrue à 2 modulo 3. Ce sera donc également le cas au premier tirage comme prouvé précédemment.
Donc $P(1)$ est vraie.

De plus si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geqslant 1$, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(k)$ est vraie pour tout entier naturel non nul k.
D'où pour tout entier naturel non nul k, $r_k - v_k \equiv 2\ [3]$.

3°)

a) **Déterminons les valeurs possibles de $r_n - v_n$ après le n-ième tirage et le replacement de deux jetons selon la règle si tous les jetons étaient de la même couleur.**

Si tous les jetons étaient de la même couleur après le n-ième tirage on aurait :

$j_n = 15$, $r_n = 0$ et $v_n = 0$
ou
$j_n = 0$, $r_n = 15$ et $v_n = 0$
ou
$j_n = 0$, $r_n = 0$ et $v_n = 15$

puisqu'il y a au total $7+5+3=15$ jetons dans l'urne.

On aurait donc $r_n - v_n = 0$ ou $r_n - v_n = 15$ ou $r_n - v_n = -15$.
Les valeurs possibles de $r_n - v_n$ seraient donc 0, 15 et – 15.

b) **Déduisons-en si tous les jetons de l'urne peuvent être de la même couleur.**

Si tous les jetons étaient de la même couleur au n-ième tirage, on devrait avoir $r_n - v_n = 15$ ou $r_n - v_n = 0$ ou $r_n - v_n = -15$.
Or $3 \mid 15$, $3 \mid 0$ et $3 \mid -15$.

On devrait donc avoir $r_n - v_n \equiv 0\ [3]$.
Or pour tout entier naturel n non nul on a $r_n - v_n \equiv 2\ [3]$.
On en déduit que tous les jetons de l'urne ne peuvent pas être de la même couleur.