TS1

Devoir pour le 26-11-2013

I. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel fixé et par la relation de récurrence $nu_n = (n+1)u_{n-1} + 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

1°) Programmer le calcul des termes de la suite sur calculatrice en prenant plusieurs valeurs de a.

Conjecturer alors la nature de la suite.

2°) Démontrer cette conjecture.

II. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

1°) Calculer P_2 et P_3.

2°) Donner la valeur de P_{100} à l'aide de la calculatrice.

3°) On se propose de déterminer une formule simplifiée de P_n.

a) Soit k un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

Simplifier le produit $\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

b) Déterminer une expression simplifiée de P_n.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

Initialement, l'exercice I était donné sous une forme différente due à une erreur de frappe.
L'énoncé marchait quand même.

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel fixé et par la relation de récurrence $nu_n = \left(n+1\right)u_{n-1} - 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

1°) Programmer le calcul des termes de la suite sur calculatrice en prenant plusieurs valeurs de a.

Conjecturer alors la nature de la suite.

2°) Démontrer cette conjecture.

Corrigé du DM pour le 26-11-2013

I.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = a \ \text{(avec } a \in \mathbb{R}) \\ \forall\, n \geqslant 1 \quad nu_n = (n+1)u_{n-1} + 1 \end{cases}$$

1°)

• Programmons le calcul des termes de la suite (u_n) sur calculatrice en prenant plusieurs valeurs de a.

Pour $a = 1$	Pour $a = 2$	Pour $a = 5$
$u_0 = 1$ $u_1 = 3$ $u_2 = 5$ $u_3 = 7$	$u_0 = 2$ $u_1 = 5$ $u_2 = 8$ $u_3 = 11$	$u_0 = 5$ $u_1 = 11$ $u_2 = 17$ $u_3 = 23$

• Conjecturons alors la nature de la suite.

Grâce à la calculatrice, on peut conjecturer que la suite (u_n) est arithmétique de raison $a+1$.

2°) **Démontrons cette conjecture.**

1ère méthode :

On effectue encore une démonstration par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = n(a+1)+a$ ».

• Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.

$u_0 = a = 0 \times (a+1) + a$

Donc la phrase $P(0)$ est vraie.

• Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $u_k = k(a+1)+a$.
Démontons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = (k+1)(a+1)+a$.

$$
\begin{aligned}
(k+1)u_{k+1} &= (k+2)\left[k(a+1)+a\right]+1 \\
&= \left[(k+1)+1\right]\left[k(a+1)+a\right]+1 \\
&= (k+1)\left[k(a+1)+a\right]+\left[k(a+1)+a\right]+1 \\
&= (k+1)\left[k(a+1)+a\right]+(k+1)(a+1)
\end{aligned}
$$

Donc, en simplifiant les deux membres par $k+1$ qui est non nul, on obtient l'égalité :

$$u_{k+1} = k(a+1)+a+(a+1)$$

Donc $u_{k+1} = (k+1)(a+1)+a$

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel *n* on a $u_k = k(a+1)+a$.

2^e^ méthode :

On démontre que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n-1}+u_{n+1} = 2u_n$ qui est une propriété caractéristique des suites arithmétiques (chaque terme, sauf le 1^er^, est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent ; cette propriété des suites arithmétiques justifie le nom de suite arithmétique).

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On a : $nu_n = (n+1)u_{n-1}+1$ (1) et $(n+1)u_{n+1} = (n+2)u_n+1$ soit $(n+2)u_n+1 = (n+1)u_{n+1}$ (2).

On écrit les égalités (1) et (2).

$$nu_n = (n+1)u_{n-1}+1 \quad (1)$$
$$(n+2)u_n+1 = (n+1)u_{n+1} \quad (2)$$

On ajoute membre à membre à membre les égalités (1) et (2).

$$
\begin{aligned}
&nu_n+(n+2)u_n+\cancel{1} = (n+1)u_{n-1}+\cancel{1}+(n+1)u_{n+1} \\
&(2n+2)u_n = (n+1)u_{n-1}+(n+1)u_{n+1} \\
&2(n+1)u_n = (n+1)u_{n-1}+(n+1)u_{n+1}
\end{aligned}
$$

On simplifie l'égalité par *n* + 1. On obtient ainsi la relation souhaitée.
$2u_n = u_{n-1}+u_{n+1}$.

Cette méthode prouve que la valeur de u_0 n'a absolument aucune influence sur le résultat.

Avec la version initiale où $nu_n = (n+1)u_{n-1}-1$, on obtient une suite arithmétique de raison *a* – 1.

II.

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\quad (n\geqslant 2)$$

1°) **Calculons P_2 et P_3.**

On effectue les deux calculs à la main.

$$P_2=1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}=\frac{2}{3}$$

2°) **Donnons la valeur de P_{100} à l'aide de la calculatrice.**

$$P_{100}=\prod_{k=2}^{k=100}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

On saisit sur la calculatrice : « prod(seq(1 – 1/K^2), K, 2, 100) ».

On obtient : $P_{100}=0,505$

3°)

a) **Simplifions le produit $\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$ $(k\geqslant 2)$.**

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)&=\frac{k-1+1}{k-1}\times\frac{k-1}{k}\\&=\frac{\cancel{k}}{\cancel{k-1}}\times\frac{\cancel{k-1}}{\cancel{k}}\\&=1\end{aligned}$$

b) **Déterminons une expression simplifiée de P_n.**

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left[1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\left[1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]...\left[1^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{1}\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{1}\left(1+\frac{1}{4}\right)...\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ (on effectue une sorte de « télescopage »)

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

4°) **Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.**

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{2}$.

2-12-2013

Donatien Lenoir m'a écrit sur une feuille.

$u_n = \dfrac{(n+1)u_{n-1}+1}{n}$ quand on définit à partir de $u_1 = a$

ou

$u_n = \dfrac{(n+2)u_{n-1}+1}{n+1}$ quand on définit à partir de $u_0 = a$

$u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,5 \qquad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times a$

$u_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \qquad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times a$

$u_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad r = 1,5 \qquad \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times a$

Démontrer que (u_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a$.

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n+1}{n}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)\left(a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times a\right)\times n\right)+1}{n}$$

$$u_{n+1} = \frac{\cancel{n}\left(a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times a\right)\times n\right)}{\cancel{n}}+\frac{a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times a\right)\times n+1}{n}$$

Simplifier pour arriver à $u_{n+1} = a+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a\right)\times(n+1)$

$$u_{n+1} = u_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)$$

Idée personnelle notée par moi ce même jour :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ nu_n = (n+1)u_{n-1}+\lambda \end{cases}$$