**TS1**

# Devoir pour le 4-11-2013

## I.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}(2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

---

## II.

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + n \times (-1)^{n+1}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ et placer les points $\mathrm{A}_n$ de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour $n \in \{0\ ;1\ ;\ \ldots\ ;5\}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (prendre un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique).

2°) On désigne par $(v_n)$ et $(w_n)$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Démontrer que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont des suites arithmétiques.

Calculer $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$ et vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{2n-1} = -u_{2n}$.

3°) On désigne par $E$ l'ensemble des points $\mathrm{A}_n$ lorsque $n$ décrit $\mathbb{N}$.

Démontrer que $E$ est inclus dans la réunion de deux droites $D$ et $D'$ que l'on tracera sur le graphique.

# Corrigé du DM pour le 4-11-2013

**I.**

**Démontrons que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}(2p-1)^3 = 2n^4 - n^2$.**

On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}(2p-1)^3$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$ : « $S_n = 2n^4 - n^2$ ».

**Initialisation :**

Vérifions que $P(1)$ est vraie.
$S_1 = (2\times1-1)^3 = 1$
Or $2\times1^4 - 1^2 = 1$

donc on peut écrire $S_0 = \dfrac{0^2\times(0+1)^2}{4}$.
D'où $P(1)$ est vraie.

**Hérédité :**
Considérons un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = 2k^4 - k^2$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k + 1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = 2(k+1)^4 - (k+1)^2$.

On a : $S_{k+1} = S_k + \left[2(k+1)-1\right]^3$

$$\begin{aligned}
&= 2k^4 - k^2 + (2k+1)^3 \\
&= 2k^4 - k^2 + (2k)^3 + 1^3 + 3\times(2k)^2\times1 + 3\times1^2\times2k \\
&= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 1 + 12k^2\times1 + 6k \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
2(k+1)^4 - (k+1)^2 &= 2\left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1^4\right) - \left(k^2 + 2k + 1\right) \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2 - k^2 - 1 - 2k \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1
\end{aligned}$$

Par suite, $S_{k+1} = 2(k+1)^4 - (n+1)^2$.

Donc $P\,(k + 1)$ est vraie.

**Conclusion :**

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

**Autre méthode :** sans récurrence en développant l'expression
Il fallait connaître l'expression de la somme des cubes des premiers entiers naturels que l'on pouvait trouver sur Internet.

---

**II.**

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 1 \quad u_n = u_{n-1} + n \times (-1)^{n+1} \end{cases}$$

1°)

**• Calculons $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$**

$u_1 = u_0 + 1 \times (-1)^2 = 0 + 1 = 1$

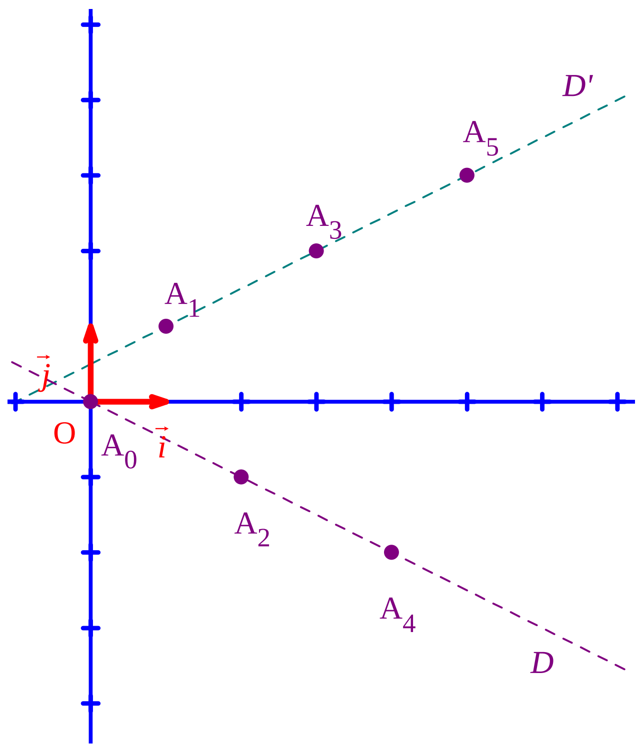
$u_2 = u_1 + 2 \times (-1)^3 = 1 - 2 = -1$

$u_3 = u_2 + 3 \times (-1)^4 = -1 + 3 = 2$

$u_4 = u_3 + 4 \times (-1)^5 = 2 - 4 = -2$

$u_5 = u_4 + 5 \times (-1)^6 = -2 + 5 = 3$

**• Plaçons les points $\mathrm{A}_n$ de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour $n \in \{0\,;1\,;\ldots\,;5\}$.**



2°)

**• $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ v_n = u_{2n}$**

**Démontrons que $(v_n)$ est une suite arithmétique.**

$$\begin{aligned}\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ v_{n+1} - v_n &= u_{2n+2} - u_{2n} \\ &= u_{2n+1} + (2n+2)\times(-1)^{2n+3} - \left[u_{2n-1} + 2n\times(-1)^{2n+1}\right] \\ &= u_{2n+1} - 2n - 2 - u_{2n-1} + 2n \\ &= u_{2n+1} - u_{2n-1} - 2 \\ &= 1 - 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison – 1.

**• $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ w_n = u_{2n+1}$**

**Démontrons que $(w_n)$ est une suite arithmétique.**

$$\begin{aligned}\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ w_{n+1} - w_n &= u_{2n+3} - u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} + (2n+3)\times(-1)^{2n+4} - \left[u_{2n1} + (2n+1)\times(-1)^{2n+2}\right] \\ &= u_{2n+2} + 2n + 3 - u_{2n} - 2n - 1 \\ &= u_{2n+2} - u_{2n} + 2 \\ &= -1 + 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc la suite $(w_n)$ est arithmétique de raison 1.

**• Calculons $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.**

Par suite, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ v_n = -n$.

Par suite, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ w_n = n + 1$.

**Vérifions que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{2n-1} = -u_{2n}$.**

$$u_{2n} = -n$$
$$u_{2n-1} = w_{n-1} = n - 1 + 1 = n$$

On a donc : $u_{2n-1} = -u_{2n}$

3°)

$E$ : ensemble des points $\mathrm{A}_n$ lorsque $n$ décrit $\mathbb{N}$

**Démontrons que *E* est inclus dans la réunion de deux droites *D* et *D'*.**

Soit $n$ un entier naturel.

• Si $n$ est pair alors $n=2p$.

$u_n = u_{2p} = v_p = -p = -\dfrac{n}{2}$ donc $\mathrm{A}_n$ appartient à la droite $D$ d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$.

• Si $n$ est impair alors $n=2p+1$.

$u_n = u_{2p+1} = p+1 = \dfrac{n-1}{2}+1 = \dfrac{n+1}{2}$ donc $\mathrm{A}_n$ appartient à la droite $D'$ d'équation $y=\dfrac{x+1}{2}$.

Conclusion : $E$ est inclus dans $D \cup D'$.