$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 11 octobre 2013 (30 min)

Prénom : …………………………………..……… **Nom :** …………………

Note : …. / 20

I. (6 points)

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction « racine carrée » dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Parmi les points suivants, lesquels appartient à la courbe $\mathscr{C}$?
Donner la réponse sans justifier en utilisant le symbole $\in$ ou $\notin$.

$\text{E}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\text{F}\left(\dfrac{1}{36};0{,}166\right)$ $\text{G}\left(-\dfrac{9}{4};-\dfrac{3}{2}\right)$

E … $\mathscr{C}$ F … $\mathscr{C}$ G … $\mathscr{C}$

2°) Calculer $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ (donner le résultat sans justifier) puis déterminer, en justifiant, si le point H de coordonnées $\left(3-2\sqrt{2}\,;\sqrt{2}-1\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 =$ ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse x ($x \geqslant 0$).
Exprimer OM^2 en fonction de x.

……………………………………………………………………………………………………

II. (3 points)

On pose $\text{A} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer le signe de A. Pour cela, on procède par inégalités successives.
Compléter les pointillés par le signe < ou > sauf après le « car » où l'on attend une phrase s'appuyant sur le sens de variation d'une fonction de référence.

$-\sqrt{3}$ ….. $\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$ ….. $2+\sqrt{3}$

$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ….. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ car ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

Donc $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ … 0 soit A … 0.

Bonus (à ne traiter que si le reste a été fait et s'il reste du temps) :
Calculer A^2 ; en déduire la valeur exacte de A.

III. (4 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.
On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit x un réel quelconque tel que $0 < x < 1$.

Compléter à l'aide du signe > ou < les inégalités suivantes :

x …… $\sqrt{x}$ (sans justifier)

$\dfrac{x}{x+1}$ …… $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ en justifiant le passage entre l'inégalité précédente et cette inégalité

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) À l'aide du résultat précédent, compléter la phrase suivante concernant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle]0 ; 1[à l'aide du mot « au-dessus » ou « au-dessous ».

$\mathscr{C}$ est ………………………………… de $\mathscr{C}'$ sur l'intervalle]0 ; 1[.

Vérifier graphiquement en traçant les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur l'écran de la calculatrice.

IV. (3 points)

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x}$ en rédigeant selon le modèle indiqué :

$f(x)$ existe si et seulement si ……………………………………………………………………

si et seulement si ……………………………………………………………………

$\mathcal{D}$ = …………

V. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = x+1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

…………………………………………………………..

…………………………………………………………..

…………………………………………………………..

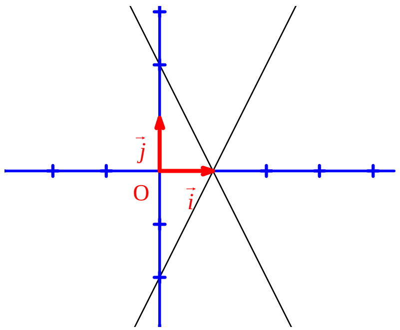
L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S =$ …………….. .

VI. (2 points)

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note E l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que l'on ait $4(x-1)^2 - y^2 = 0$.

Un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour tracer l'ensemble E et obtenu le graphique suivant.
Expliquer ce graphique ; on précisera en particulier la nature précise de E.



On utilisera un raisonnement par « chaîne d'équivalences » en adoptant le modèle de rédaction ci-dessous :

> Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.
>
> $\mathrm{M} \in E$ si et seulement si ………………..
>
> si et seulement si ………………..
>
> si et seulement si ………………..

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 11-10-2013

I.

$\mathscr{C}$: courbe représentative de la fonction « racine carrée » dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1°) **Parmi les points suivants, lesquels appartient à la courbe $\mathscr{C}$?**
Donner la réponse sans justifier en utilisant le symbole $\in$ ou $\notin$.

$\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{F}\left(\frac{1}{36}\,;0{,}166\right)$ $\qquad$ $\mathrm{G}\left(-\frac{9}{4}\,;-\frac{3}{2}\right)$

$\mathrm{E} \in \mathscr{C}$ $\qquad$ $\mathrm{F} \notin \mathscr{C}$ $\qquad$ $\mathrm{G} \notin \mathscr{C}$

• E

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\mathrm{E} \in \mathscr{C}$.

• F

$\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} = 0{,}166\underline{6}...$

Donc $\sqrt{\frac{1}{36}} \neq 0{,}166$; par suite, donc $\mathrm{F} \notin \mathscr{C}$.

Propriété sur l'écriture décimale illimitée des réels :

Deux nombres sont égaux si et seulement si toutes leurs décimales sont égales.

• F

$-\frac{9}{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+$ (domaine de la fonction « racine carrée » donc $\mathrm{G} \notin \mathscr{C}$ (aucun calcul à effectuer).

2°) **Calculer $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ puis déterminer, en justifiant, si le point H de coordonnées $\left(3-2\sqrt{2}\,;\sqrt{2}-1\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.**

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$ $\qquad$ (on attendait évidemment la valeur exacte et non une valeur approchée)

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$ car $\sqrt{2}-1>0$

$\mathrm{H} \in \mathscr{C}$

3°) M : point quelconque de $\mathscr{C}$ d'abscisse x ($x \geqslant 0$)
Exprimer OM^2 en fonction de x.

$\mathrm{OM}^2 = \left(x-0\right)^2 + \left(\sqrt{x}-0\right)^2 = x^2 + x$

II.

On pose $\mathrm{A} = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer le signe de A. Pour cela, on procède par inégalités successives. Compléter les pointillés par le signe < ou > sauf après le « car » où l'on attend une phrase s'appuyant sur le sens de variation d'une fonction de référence.

$-\sqrt{3} < \sqrt{3}$

$2-\sqrt{3} < 2+\sqrt{3}$

$\sqrt{2-\sqrt{3}} < \sqrt{2+\sqrt{3}}$ car **la fonction « racine carrée » est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.**

Donc $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} < 0$ soit $\mathrm{A} < 0$.

Bonus :

Calculer A^2 ; en déduire la valeur exacte de A.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^2 &= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2\times\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}} \\
&= 4-2\times\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\times\left(2+\sqrt{3}\right)} \\
&= 4-2\times\sqrt{4-3} \\
&= 4-2\times 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{A} = -\sqrt{2}$ car $\mathrm{A} < 0$.

III.

$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$; $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

$\mathscr{C}$: courbe représentative de f

$\mathscr{C}'$: courbe représentative de g

1°) $0 < x < 1$

Compléter à l'aide du signe > ou < les inégalités suivantes :

$x < \sqrt{x}$

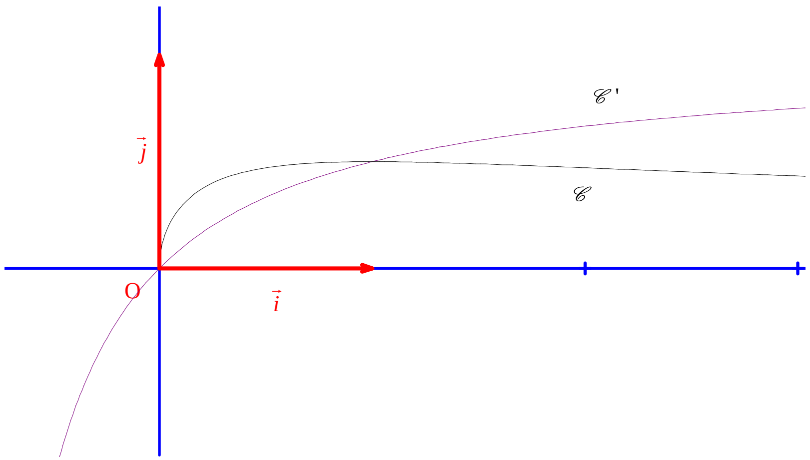
$\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ car on a divisé les deux membre de l'inégalité par $x+1$ avec $x+1>0$ (car $0<x<1$).

2°) **À l'aide du résultat précédent, compléter la phrase suivante concernant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle]0 ; 1[à l'aide du mot « au-dessus » ou « au-dessous ».**

$\mathscr{C}$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle]0 ; 1[.

On aurait pu préciser que $\mathscr{C}$ est **strictement au-dessus** de $\mathscr{C}\,'$ sur l'intervalle]0 ; 1[.

Vérifier graphiquement en traçant les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}\,'$ sur l'écran de la calculatrice.



IV.

Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x}$ en rédigeant selon le modèle indiqué :

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$ et $1-x \geqslant 0$

si et seulement si $x \neq 0$ et $x \leqslant 1$

$\mathscr{D} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,1]$

V.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = x+1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

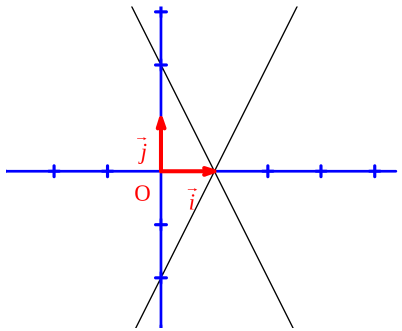
$x+2\sqrt{x}+1 = x+1$
$2\sqrt{x} = 0$
$\sqrt{x} = 0$
$x = 0$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S = \{0\}$.

VI.

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note *E* l'ensemble des points M de coordonnées (*x* ; *y*) tels que l'on ait $4\left(x-1\right)^2 - y^2 = 0$.
Un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour tracer l'ensemble *E* et obtenu le graphique suivant. Expliquer ce graphique ; on précisera en particulier la nature précise de *E*.



Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (*x* ; *y*).

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $4\left(x-1\right)^2 - y^2 = 0$

si et seulement si $\left[2\left(x-1\right)\right]^2 - y^2 = 0$

si et seulement si $\left[2\left(x-1\right)-y\right]\left[2\left(x-1\right)+y\right] = 0$

si et seulement si $2\left(x-1\right)-y=0$ ou $2\left(x-1\right)+y=0$

si et seulement si $y = 2\left(x-1\right)$ ou $y = -2\left(x-1\right)$

On en déduit que *E* est la réunion des droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = 2\left(x-1\right)$ et $y = -2\left(x-1\right)$.

$E = D_1 \cup D_2$

On peut noter que les droites D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.