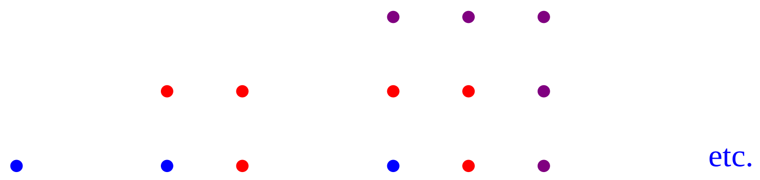
TS1

Devoir pour le 14-10-2013

I. 1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Démontrer cette conjecture.

2°) Expliquer à l'aide d'une ou deux phrases comment la figure ci-dessous permet de retrouver sans calcul le résultat précédent (« preuve sans parole »*).



*preuve sans parole : preuve qui en elle-même permet de visualiser un résultat

---

II. Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $1+\mathrm{i}$, C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses, D le symétrique de B par rapport à l'axe des ordonnées.
À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

Il n'est pas demandé d'imprimer les figures réalisées avec *Geogebra*.
En revanche, il est demandé de faire un graphique sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique et de représenter les ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 de différentes couleurs (sur le même graphique).

1°) Soit M un point quelconque de (OB), d'affixe $z = \lambda(1+\mathrm{i})$ où λ est un réel.
a) Réaliser une figure dynamique avec *Geogebra* (en définissant les points par leurs affixes, *Geogebra* se mettra automatiquement en mode complexe ; on sera amené à créer un curseur et on utilisera le mode « trace activée »). Conjecturer l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (OB).

On rédigera de la manière suivante :

« D'après la figure réalisée avec *Geogebra*, il semble que l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (OB) est ……………………………….... ».

b) Démontrer cette conjecture.

2°) a) Conjecturer à l'aide de *Geogebra* l'ensemble E_2 des points M' lorsque M décrit la droite (OC).
b) Démontrer cette conjecture.

3°) Déterminer l'ensemble E_3 des points M' lorsque le point M décrit l'axe des imaginaires purs.

4°) a) Conjecturer à l'aide de *Geogebra* l'ensemble E_4 des points M' lorsque M décrit la droite (BD).
b) Démontrer cette conjecture.

Conseils

• Rédiger sur une copie à petits carreaux au stylo à plume.

• Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

• On s'efforcera de rédiger de la manière la plus concise possible.

• *Geogebra* se met tout seul en mode complexe à partir du moment où on tape les affixes des points (avec des i).

Note ajoutée le 6-10-2015 :

La trace activée ne sert que pour le point M' ; elle ne sert pas pour le point M.

Corrigé du DM pour le 14-10-2013

I. Formule sommatoire

1°)

• À l'aide de la calculatrice, conjecturons l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On utilise la calculatrice ou un tableur.

Sur calculatrice, on peut réaliser un programme ou bien définir une suite dont le terme général est une somme.

Programme sur calculatrice TI 83-Plus	: Prompt N : somme(suite((2K – 1, K, 1, N)) → S : Disp S

Pour $\mathrm{N}=1$, on obtient $\mathrm{S}=1$.

Pour $\mathrm{N}=2$, on obtient $\mathrm{S}=4$.

Pour $\mathrm{N}=3$, on obtient $\mathrm{S}=9$.

Etc.

La somme S semble être égale au carré de N pour toute valeur de N supérieure ou égale à 1.

On peut conjecturer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)=n^2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

• Démontrons cette conjecture.

Il y a plusieurs méthodes possibles :

- récurrence
- en considérant la suite de terme général $2k-1$
- en utilisant les propriétés du symbole Σ.

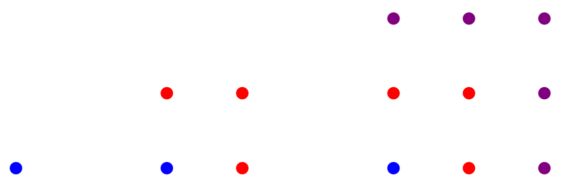
Nous allons détailler la dernière méthode.

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{k=n}k-\sum_{k=1}^{k=n}1$$
$$=\cancel{2}\,\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}-n$$
$$=n(n+1)-n$$
$$=n^2$$

2°) **Expliquons comment la figure ci-dessous permet de retrouver sans calcul le résultat précédent.**

$\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)$ représente la somme des n premiers entiers naturels impairs (nous venons de déterminer une formule sommatoire pour la somme des n premiers entiers naturels impairs).

Sur la figure, on agrège chaque fois une rangée verticale et une rangée horizontale.
On obtient des « nombres carrés ».



etc.

1 $\qquad$ $1+3=2^2$ $\qquad$ $1+3+5=3^2$

On peut rapprocher cette preuve de la représentation géométrique des nombres chez Euclide.

N.B. : Certains élèves ont parlé d'aires, il fallait parler de nombre de points.

II.

$\mathrm{A}(1)$

$\mathrm{B}(1+\mathrm{i})$

$\mathrm{C}=S_{(\mathrm{O}x)}(\mathrm{B})$ donc $\mathrm{C}(1-\mathrm{i})$

$\mathrm{D}=S_{(\mathrm{O}y)}(\mathrm{B})$ donc $\mathrm{D}(-1+\mathrm{i})$

$\mathrm{M}(z)$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{M}'(z')$ avec $z'=z^2+1$

Il convient de bien faire la différence entre décrire et appartenir.
« décrire » ne veut pas dire « appartenir ».
« λ décrit $\mathbb{R}$ » signifie que « λ prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$ ».

1°) M : point quelconque de (OB), d'affixe $z=\lambda(1+\mathrm{i})$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

On peut aisément justifier que M admet une affixe de cette forme car comme M $\in$ (OB), les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.
Par suite, l'affixe de M est égale à $\lambda(1+\mathrm{i})$.

a) **Conjecturons l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (OB).**

D'après la figure réalisée avec *Geogebra*, il semble que l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (OB) est la demi-droite [AB).

b) **Démontrons cette conjecture.**

M a pour affixe $z=\lambda(1+\mathrm{i})$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= 1+\left[\lambda(1+\mathrm{i})\right]^2 \\ &= 1+\lambda^2(1+\mathrm{i})^2 \\ &= 1+2\mathrm{i}\lambda^2 \end{aligned}$$

Le point M' a pour coordonnées $\left(1\,;2\lambda^2\right)$.
Donc M' appartient à la droite d'équation $x=1$ c'est-à-dire (AB).

Lorsque M décrit (OB), λ décrit $\mathbb{R}$ et $2\lambda^2$ décrit l'intervalle [0 ; + ∞[.
Donc M' décrit la demi-droite [AB).

$\boldsymbol{E_1=[\mathrm{AB})}$

Attention, le raisonnement suivant ne tient pas la route.

$z'=1+\mathrm{i}\times 2\lambda^2$

Or λ est un réel donc $2\lambda^2 \geqslant 0$.

Avec cela, on démontre que si M $\in$ (OB), alors $\mathrm{M}' \in$ [AB).
On ne peut pas dire que l'ensemble E_1 des points M' est [AB) décrit la demi-droite [AC).
On démontre juste que $E_1 \subset [\mathrm{AB})$.

On pourra retenir la caractérisation de la demi-droite [AB] : $\begin{cases} x = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

Une demi-droite dans le plan muni d'un repère est caractérisée par une équation et une inéquation.

2°)

a) **Conjecturons à l'aide de *Geogebra* l'ensemble E_2 des points M' lorsque M décrit la droite (OC).**

D'après la figure réalisée avec *Geogebra*, il semble que l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (OB) est la demi-droite [AC).

b) **Démontrons cette conjecture.**

M a pour affixe $z = \lambda(1 - \text{i})$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \left[\lambda(1 - \text{i})\right]^2 \\ &= 1 + \lambda^2 (1 - \text{i})^2 \\ &= 1 - 2\text{i}\lambda^2 \end{aligned}$$

Le point M' a pour coordonnées $\left(1\,;-2\lambda^2\right)$.
Donc M' appartient à la droite d'équation $x = 1$ c'est-à-dire (AB).

Lorsque M décrit (OB), λ décrit ℝ et $-2\lambda^2$ décrit l'intervalle]– ∞ ; 0].
Donc M' décrit la demi-droite [AC).

$\boldsymbol{E_2 = [\text{AC})}$

3°) **Déterminons l'ensemble E_3 des points M' lorsque le point M décrit l'axe des imaginaires purs.**

Soit M un point quelconque de l'axe des imaginaires purs, d'affixe $z = \text{i}\lambda$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + (\lambda \text{i})^2 \\ &= 1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

Le point M' a pour coordonnées $\left(1 - \lambda^2\,;0\right)$.
Donc M' appartient à la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire l'axe des réels.

Lorsque M décrit l'axe des imaginaires purs, λ décrit ℝ et $1 - \lambda^2$ décrit l'intervalle]– ∞ ; 1] comme le montre le tableau de variation de la fonction $\lambda \mapsto 1 - \lambda^2$ sur ℝ.

λ	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-\lambda^2$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Donc M' décrit la demi-droite [AO).

$\boldsymbol{E_3 = [\text{AO})}$

4°)

a) **Conjecturons à l'aide de *Geogebra* l'ensemble E_4 des points M' lorsque M décrit la droite (BD).**

D'après la figure réalisée avec *Geogebra*, il semble que l'ensemble E_1 des points M' lorsque M décrit la droite (BD) est une parabole.

b) **Démontrons cette conjecture.**

Soit M un point quelconque de la droite (BD), d'affixe $z = \lambda + \text{i}$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= (\lambda + \text{i})^2 + 1 \\ &= \lambda^2 + 2\text{i}\lambda \end{aligned}$$

On a donc $\begin{cases} x_{\text{M}'} = \lambda^2 \\ y_{\text{M}'} = 2\lambda \end{cases}$.

On peut dire que M' décrit la courbe définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = \lambda^2 \\ y = 2\lambda \end{cases}$ (λ décrit $\mathbb{R}$).

On peut tracer cette courbe sur calculatrice en se mettant en mode paramétrique.

On rentre alors $\text{X} = \text{T}^2$ et $\text{Y} = 2\text{T}$ pour T $\in$ [– 100 ; 100].

Pour déterminer la nature de la courbe décrite par le point M', on va chercher une relation liant les coordonnées du point M'.
Pour cela, on va *éliminer* (c'est le terme employé en mathématiques) le paramètre entre les deux équations (élimination d'un paramètre).

On a : $\lambda = \dfrac{y_{\text{M}'}}{2}$ donc en remplaçant dans la première équation, on obtient $x_{\text{M}'} = \left(\dfrac{y_{\text{M}'}}{2}\right)^2$ soit $x = \dfrac{y^2}{4}$.

De plus, λ décrit $\mathbb{R}$ donc $y_{\text{M}'}$ décrit $\mathbb{R}$.

On peut donc dire que l'ensemble E_4 des points M' lorsque M décrit la droite (BD) est **la parabole***

d'équation $x = \frac{y^2}{4}$.

* On s'aperçoit que E_4 est une parabole en se plaçant dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{v}, \vec{u}\right)$.

En effet, si un point M a pour coordonnées (x ; y) dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{v}, \vec{u}\right)$, alors il a pour coordonnées (y ; x) dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{v}, \vec{u}\right)$.

Donc E_4 a pour équation $Y = \frac{X^2}{4}$.

On peut dire E_4 est une parabole de sommet O.

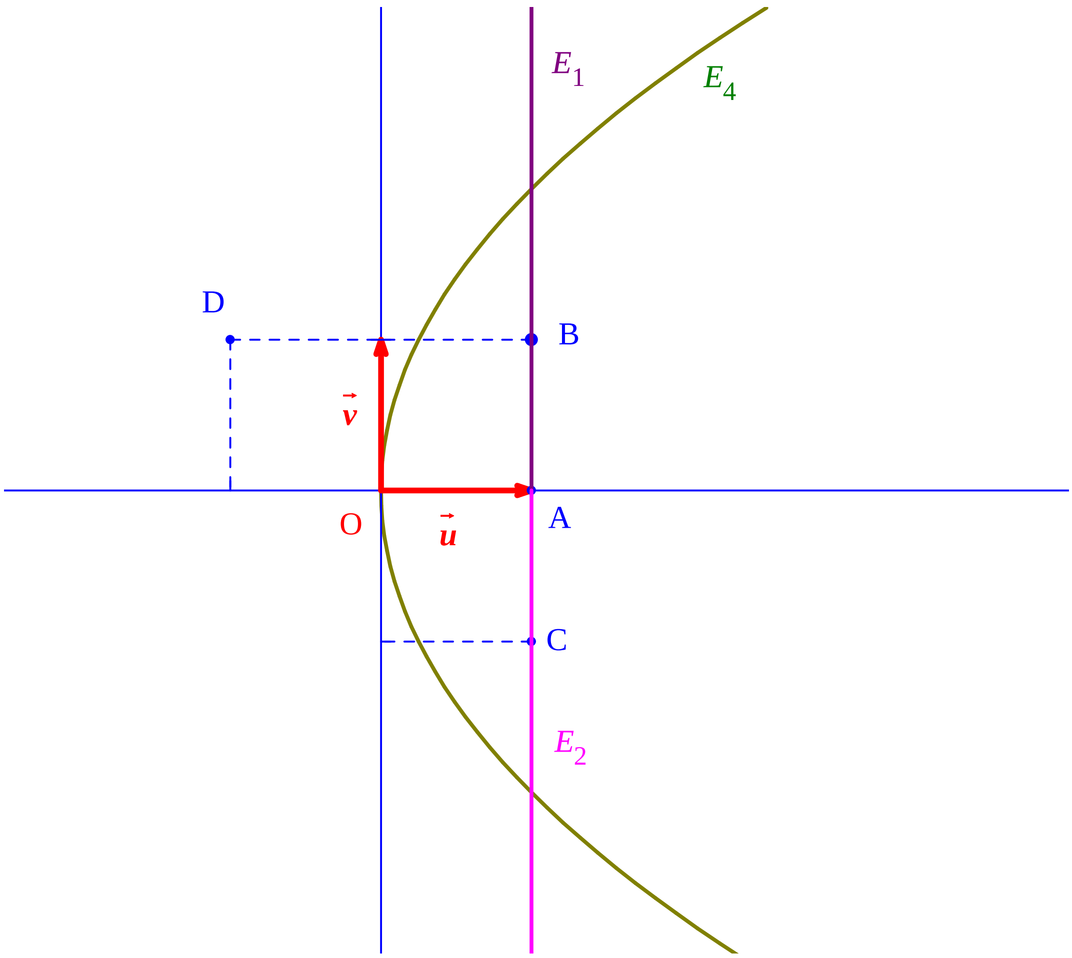
** Une autre méthode consiste à écrire que $x = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et ($\sqrt{x} = \frac{y}{2}$ ou $-\sqrt{x} = \frac{y}{2}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -2\sqrt{x} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

On peut alors écrire que E_4 est la réunion des courbes Γ_1 et Γ_2 d'équations respectives $y = 2\sqrt{x}$ et $y = -2\sqrt{x}$

On a : $E_4 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Graphique :



Dans toutes les questions, de l'exercice **II.**, on s'intéresse à des problèmes de « lieux géométriques ».

À la correction le 14-10-2013, un élève (Eliott Gesteau) m'a signalé la fonction « Lieu » de *Geogebra*.