LA DÉFINITION EN MATHÉMATIQUES

Émile Borel

Émile Borel (1871-1956) fut à la fois un très grand mathématicien et un vulgarisateur exceptionnel. La conférence qu'il a choisi de prononcer à un congrès de mathématiciens en 1948 porte sur un sujet essentiel en mathématiques : la définition de ses concepts et de son vocabulaire. On la trouve dans *Les grands courants de la pensée mathématique* (éd. CAHIERS DU SUD, Paris 1948, p. 24-34, réédité par ALBERT BLANCHARD en 1962).

I.

« Les Mathématiques sont une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai. »

Cette boutade de Bertrand Russell tend à mettre en évidence le rôle fondamental que jouent en mathématiques les définitions arbitraires.

On pourrait d'ailleurs dire tout aussi bien : « Les mathématiques sont la seule science où l'on sait toujours exactement de quoi l'on parle et où l'on est certain que ce que l'on dit est vrai. » En effet, si nous parlons des propriétés de la droite, le mot ligne droite n'a pas le même sens dans la géométrie d'Euclide, de Riemann, ou de Lobatchefski ; mais, si la droite est définie conformément aux postulats de telle ou telle géométrie, nous saurons exactement de quoi nous parlons et nous serons assurés de la vérité de tel ou tel théorème : la somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux droits, ou bien est toujours supérieure à deux droits, ou bien est toujours inférieure à deux droits ; bien que ces théorèmes apparaissent contradictoires, chacun d'eux est vrai dans une des géométries, c'est-à-dire avec une définition convenable de la droite.

De plus en plus, les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les relations entre certains êtres abstraits définis d'une manière arbitraire, sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradiction. Il faudrait toutefois ajouter, pour ne pas risquer de confondre les mathématiques, ni avec la logique, ni avec des jeux tels que le jeu d'échecs, que ces définitions arbitraires ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec des objets réels ; tel est le cas pour la ligne droite, pour le cercle, pour le corps solide de la mécanique rationnelle, etc. Mais les nombres imaginaires, les nombres transfinis, bien d'autres êtres mathématiques, sont de pures créations de l'esprit humain. Elles sont justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens ou les physiciens, et d'éclaircir des difficultés qu'ils avaient rencontrées.

Il faut d'ailleurs distinguer entre les définitions que l'on peut appeler générales, comme celles de la fonction d'une variable réelle ou d'une variable complexe et les définitions particulières qui permettent de distinguer des classes de fonctions présentant un intérêt spécial, telles que les fonctions continues d'une variable réelle, les fonctions discontinues de première classe d'après Baire, etc., et, parmi les fonctions de variable complexe, les fonctions entières, les fonctions méromorphes, les fonctions abéliennes, les fonctions fuchsiennes, etc.

Enfin, on peut particulariser davantage et définir des fonctions individuelles, telles que la fonction exponentielle, les fonctions circulaires, etc. Il en est de même en géométrie et toutes les autres branches des mathématiques. Il y a évidemment une certaine part d'arbitraire dans le choix des définitions que l'on juge intéressantes, mais nous ne pouvons discuter ici cette question, car elle amènerait à faire un exposé critique de l'ensemble de la science mathématique, ce qui exigerait de nombreux volumes, à supposer que l'on puisse trouver un auteur ayant la compétence suffisante pour les écrire.

Nous nous bornerons donc à ces généralités sur les définitions axiomatiques et allons étudier avec plus de détail quelques problèmes qui concernent les définitions que l'on peut appeler individuelles et qui définissent, non pas une classe d'êtres mathématiques, mais un être mathématique déterminé.

Prenons d'abord les définitions les plus simples de l'arithmétique ; celles des nombres entiers, des nombres rationnels, des nombres irrationnels. Chacune d'elle définit un ensemble de nombres et permet de définir avec précision et sans ambiguïté certains éléments de ces ensembles. Par exemple, 3, 17, 10^{100}, $2^{10\,000}$, sont des nombres entiers déterminés ; leur définition précise résulte des conventions relatives à la numération décimale et aux exponentielles entières. De même $\frac{3}{4}$, ou $\frac{5}{7}$, ou 0,3427, sont des nombres rationnels bien définis. Nous savons aussi que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, e, π sont des nombres irrationnels. La question principale qui se pose d'abord est la suivante : quels sont les nombres qui peuvent être ainsi *bien définis* ? Il est clair que la solution de cette question entraînerait la solution des questions analogues que l'on pourrait se poser pour tous les êtres mathématiques. Par exemple, un cercle est défini si l'on connaît son centre et son rayon ; deux cercles de même rayon sont d'ailleurs égaux et peuvent en géométrie euclidienne, être regardés comme identiques ; mais pour donner le rayon, il faut donner un nombre et nous revenons ainsi au problème de la définition des nombres.

Occupons-nous d'abord des nombres entiers.

Il est facile, au moyen de symboles mathématiques, de définir des nombres entiers de plus en plus grands ; si, par exemple, on désigne par $\varphi_1(n)$ le nombre 10^n ; par $\varphi_2(n)$ le nombre $\varphi_1\left[\varphi_1(n)\right]$; par $\varphi_k(n)$, le nombre $\varphi_1\left[\varphi_{k-1}(n)\right]$; etc. ; le nombre $\varphi_k(n)$ sera un nombre très grand, si *k* et *n* sont eux-mêmes très grands. Mais, on pourra ensuite prendre $\Psi_1(n) = \varphi_n(n)$ comme point de départ et obtenir des nombres encore bien plus grands, et ainsi de suite.

Toutefois, il apparaît que ces nombres dont le nombre de chiffres est incalculable, sont des nombres exceptionnels parmi ceux qui ont un très grand nombre de chiffres. Il serait absolument impossible à un homme d'écrire un nombre de quelques milliards de chiffres, s'il devait effectivement écrire tous ces chiffres. On pourrait cependant penser, que, si l'on définit un nombre *n*, comme étant le milliardième nombre premier, ce nombre est bien défini, car tous les mathématiciens sont d'accord pour être certains qu'ils parlent du même nombre lorsqu'ils parlent de *n*. Il est toutefois impossible, dans l'état actuel de la science, d'écrire effectivement ce nombre *n*, bien qu'on sache qu'il n'a que 10 chiffres ; les calculs prendraient trop de temps.

À plus forte raison si l'on parlait du nombre premier N dont le rang serait égal à 10^n. Il n'est cependant pas absurde de penser qu'il serait possible un jour de démontrer certaines propriétés particulières les nombres *n* et N.

Si nous nous bornons aux nombres entiers dont le nombre de chiffres est relativement petit, ne dépasse pas, par exemple, 50 ou 60, il semble d'abord qu'il est facile de définir l'un quelconque d'entre eux, car nous pouvons écrire à la suite les uns des autres 50 ou 60 chiffres choisis arbitrairement. Mais on pourrait aussi bien dire qu'il est facile d'écrire les unes à la suite des autres, 40 à 50 lettres de l'alphabet français, de manière à obtenir un vers alexandrin. Et cependant, il est certain que la langue française aura cessé d'exister, tout au moins sous sa forme actuelle avant qu'aient été écrits tous les vers français de douze syllabes. Il est aussi inimaginable que nous puissions connaître tous les nombres de 60 chiffres que de Supposer que nous connaissons tous les vers français de douze syllabes. Pour celui qui connaîtrait toutes les propriétés des nombres, deux nombres entiers de 60 chiffres seraient aussi différents entre eux que peuvent l'être un beau vers de Victor Hugo et un assemblage de 46 lettres dépourvu de sens. Si longtemps que puisse durer l'humanité, les hommes n'arriveront jamais à définir que très peu de nombres de 60 chiffres, choisis parmi ceux qui ont des propriétés particulières ou intéressantes, de même qu'ils n'écriront qu'une bien faible partie des ouvrages en vers ou en prose qui pourraient être conçus comme possibles.

Disons quelques mots des combinaisons artificielles et dépourvues de sens. En appliquant à un texte français une méthode cryptographique, on obtient un assemblage de lettres incompréhensible et qui ne présente aucun intérêt pour celui qui ne connaît pas la clef de cryptographie. On pourrait, par exemple, se donner deux textes différents et les additionner lettre par lettre : c'est-à-dire lorsque l'on rencontre l'une au-dessous de l'autre la 3^e^ et la 4^e^ lettre de l'alphabet, écrire la 7^e^ ; si le total dépasse 26, on en retranchera 26, c'est-à-dire que la 15^e^ et la 17^e^ donneront la 6^e^.

On peut procéder de la même manière pour les nombres ; après avoir défini un nombre d'un très grand nombre de chiffres par une formule arithmétique simple, par exemple 2100, ou 3117 on pourra définir un autre nombre se déduisant de l'un de ceux-là en y remplaçait partout le chiffre 5 par le chiffre 7, et réciproquement, ou bien faire une *somme artificielle* (1) des deux nombres en convenant que si les chiffres 2 et 7 sont l'un au-dessous de l'autre, on inscrit pour la somme le chiffre 4, qui est le dernier chiffre de 14. Les nombres à définition artificielle semblent bien être aussi peu intéressants pour les mathématiciens que le sont les cryptogrammes pour les lecteurs d'œuvres littéraires. Il fallait cependant, pour être complet, mentionner ces définitions artificielles, car il est incontestable qu’elles satisfont à la première condition que nous avons imposée à la définition correcte ; le nombre qu’elles définissent est certainement le même pour tous les mathématiciens ; on peut en parler sans risquer aucune équivoque ; le malheur est qu’on n’a rien à en dire.

Il est intéressant d’essayer de classer les entiers qui peuvent être définis, d’après le temps nécessaire pour les définir, en admettant que l’on puisse, chaque seconde, prononcer un mot ou écrire un chiffre. Si l’on emploie le système décimal, il faudrait donc à peu près autant de secondes que de chiffres, en convenant d’énoncer purement et simplement ces chiffres les uns après les autres. Mais certains nombres d’un très grand nombre de chiffres peuvent être définis plus simplement par des formules arithmétiques, telles que 2 100, ou 257 ! (par quoi l’on désigne le produit des 257 premiers nombres entiers). On peut aussi parler du nombre premier dont le rang est un de ces nombre précédemment définis. Nous appellerons *hauteur* d’un nombre entier le temps minimum nécessaire pour le définir (exprimé en secondes, d’après les conventions précédentes).

Essayons de nous faire une idée de l’étendue réelle de l’ensemble des nombres entiers qui ont été étudiés par les mathématiciens, c’est-à-dire dont ils connaissent quelque propriété.

C’est surtout la construction de tables de nombres premiers qui a fait connaître les propriétés arithmétiques d’un très grand nombre d’entiers.

On a calculé des tables de nombres premiers qui donnent les diviseurs des nombres qui ne sont pas premiers, jusqu’à 10 millions et ces tables permettraient par des calculs laborieux mais non pas complètement inexécutables, d’arriver à décomposer en facteurs premiers un nombre n’ayant pas plus de 14 chiffres, mais si l’on écrit un nombre de 30 chiffres en choisissant les chiffres au hasard, il sera souvent impossible de le décomposer en facteurs premiers et de savoir s’il est premier (2).

Il en est de même pour les nombres entiers définis par des procédés arithmétiques, dès que la hauteur atteint quelques dizaines. Ainsi, le problème de la recherche des diviseurs des nombres de la forme $2^{n\ +1}$, dans le cas où n est une puissance de 2, problème intéressant à bien des égards n’a pu être résolu que pour des valeurs relativement faibles du nombre *n*. La hauteur de ces nombres ne dépasse cependant que de 4 unités la hauteur de *n*, c’est-à-dire est 7, si n a 3 chiffres. On énoncera par exemple : 2 exposant 512 plus 1.

En résumé, le nombre des entiers qui peuvent être définis n’est pas limité, en ce sens que lorsque l’on en a défini un certain nombre, on peut toujours en définir un de plus, mais il est pratiquement inférieur à un nombre relativement petit, en raison de la brièveté de la vie humaine et du fait que la très grande majorité des hommes ont d’autres préoccupations que de définir des nombres entiers en dehors de ceux qu’ils utilisent dans leur vie quotidienne.

En fait, le plus grand nombre des entiers qui ont été définis par les mathématiciens figurent dans les diverses tables numériques qui ont été publiées, notamment dans les tables de nombres premiers ; on peut y ajouter ceux qui figurent dans les nombreuses publications statistiques ou financières, bien que ces derniers ne paraissent pas devoir être étudiés au point de vue, de leurs propriétés arithmétiques et n’intéressent donc pas les mathématiciens.

Au total, bien que certains de ces nombres dépassent le milliard et bien que les mathématiciens aient souvent considéré des nombres beaucoup plus élevés, définis au moyen d’exponentielles ou autres notations, le nombre total des entiers qui ont été effectivement définis est certainement très inférieur à un milliard. L’imagination créatrice des hommes a été beaucoup plus féconde dans le domaine linguistique, car le nombre des lignes de tous les volumes qui ont été imprimés est de l’ordre de grandeur de mille milliards et nous avons déjà observé que chaque ligne est aussi complexe qu’un nombre de plusieurs dizaines de chiffres.

III

Les détails dans lesquels nous sommes entrés à propos des nombres entiers nous permettront d’être beaucoup plus brefs pour les autres nombres, rationnels ou irrationnels, car ceux qui peuvent être définis avec précision ne peuvent l’être qu’en prenant les entiers pour point de départ.

Ceci est évident pour les nombres rationnels, qui sont le quotient de deux nombres entiers ; c’est aussi le cas pour les nombres algébriques, racines d’une équation algébrique à coefficients entiers. De tels nombres sont biens définis lorsque les entiers dont ils dépendent sont eux-mêmes biens définis.

Passons maintenant aux nombres irrationnels. Les plus simples et les plus importants d’entre eux sont définis par des séries ou des équations différentielles. Tel est le cas pour le nombre e, pour le nombre π ; tel est le cas aussi pour les lignes trigonométriques, sinus ou cosinus. Il faut observer toutefois que, pour que sin *x* et cos *x* soient bien définis, il est nécessaire que l’argument *x* soit lui-même un nombre bien défini. Il en sera de même pour les valeurs des fonctions elliptiques (à condition que la valeur du module soit elle-même bien définie) et des autres fonctions imaginées par les mathématiciens.

Plus généralement, si l'on considère une équation différentielle algébrique dont les coefficients sont des nombres bien définis et si l'on donne des conditions initiales également bien définies, la valeur de l'intégrale pour une valeur bien définie de la variable, sera elle-même bien définie.
La notion de hauteur, que nous avons précisée pour les entiers, s'étend immédiatement à tous les nombres définis à partir d'entiers ; leur hauteur sera la somme des hauteurs des entiers qui permettent de les définir.

Dans le cas de nombres définis par une série, il suffira de donner, bien entendu, la loi de la série.
Enfin, à ces définitions naturelles, on peut adjoindre, si on le juge bon, des définitions artificielles analogues à celles des cryptogrammes ; on peut par exemple déduire d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ ou que π écrit sous forme de fonction décimale limitée, un autre nombre qui s'en déduit en remplaçant partout le chiffre 3 par le chiffre 8, et réciproquement. Mais ces nombres artificiels n'ont pas d'autres propriétés connues que celle qui est exprimée par leur définition ; ils sont sans aucun intérêt pour les mathématiciens et il n'est guère vraisemblable qu'ils cessent jamais d'être de simples curiosités.

Est-il maintenant possible d'aller plus loin et de définir d'autres nombres irrationnels ?

On peut naturellement imaginer beaucoup de définitions arithmétiques artificielles ; par exemple, écrire comme chiffres décimaux la suite naturelle des nombres entiers :

$$x = 0\ 123\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 1112\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19, \textit{etc}.$$

On peut varier de bien des manières la définition d'un nombre tel que x, mais il n'est guère vraisemblable qu'un tel nombre joue jamais un rôle en mathématiques, car il faudrait pour cela qu'on lui découvre une propriété particulière autre que sa définition.

Il est facile également de définir certains ensembles de nombres et de démontrer des propriétés qui appartiennent à tous les nombres appartenant à l'un de ces ensembles. Tel est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 ; tel est aussi le cas de bien des ensembles que l'on peut obtenir par un nombre fini ou infini d'opérations. Chaque opération consistant par exemple à retrancher d'un ensemble donné les points (3) compris dans l'un certain intervalle dont les extrémités sont des nombres bien définis. L'ensemble est alors bien défini et peut être l'objet d'une étude qui pourra permettre d'énoncer certaines propriétés communes à tous ses points. Mais, si l'on veut parler d'un point particulier de cet ensemble, suffira-t-il de le désigner par la lettre x pour pouvoir le considérer comme bien défini ? C'est ce que paraissent penser certains mathématiciens. Pour ma part, je ne puis considérer x comme bien défini lorsque, si je parle de x avec une autre personne, je ne puis pas être certain que nous nous entendons bien, c'est-à-dire que nous parlons du même nombre.

Bien entendu, de même que l'on peut démontrer, en certains cas des propriétés qui sont communes à tous les points x d'un ensemble E, il sera possible que l'on démontre des propriétés communes à tous les couples de deux points x et y de l'ensemble, sous la seule condition que x ne coïncide pas avec y. Mais cette dernière hypothèse n'entraîne nullement que x ni y soient bien définis ; chacun d'eux n'a pas d'individualité propre, si l'on sait seulement qu'il appartient à l'ensemble et qu'ils sont différents.

Lorsque l'on précise, comme nous l'avons fait, la notion de nombre bien défini, on arrive à la conclusion un peu paradoxale que les nombres irrationnels bien définis qui ont été effectivement considérés par les mathématiciens sont, en fait, beaucoup moins nombreux que les nombres entiers bien définis, car, si nous prenons comme exemple les nombres algébriques, on n'a effectivement étudié ou même écrit qu'un nombre infime des innombrables équations dont le degré est inférieur à mille et les coefficients inférieurs à un million.

Quant aux nombres transcendants, à l'exception des valeurs de certaines fonctions pour lesquelles il a été calculé des tables, on n'en a considéré et étudié qu'un nombre très faible.

Je n'insisterai pas sur la question suivante : quel est l'ordre de l'infinité des nombres transcendants qui pourraient être bien définis, si la durée de la vie humaine était illimitée et si l'on pouvait ainsi utiliser des nombres entiers aussi grands que l'on voudrait ? Ceci se rattacherait, en effet, au problème du transfini et exigerait de longs développements.

IV

Avant de terminer, disons un mot d'une difficile question. Nous avons précisé ce que l'on doit entendre par un nombre bien défini et exigé que deux mathématiciens, lorsqu'ils parlent d'un tel nombre a, soient certains qu'ils parlent du même nombre. Ne devrait-on pas ajouter que, lorsque deux nombres a et b sont bien définis, on devrait savoir avec certitude si ces deux nombres sont égaux ou inégaux ? Voici comment peut se poser ce problème. Considérons le nombre entier N = 145 ! + 1, c'est-à-dire le produit des 145 premiers nombres entiers, augmenté d'une unité. Nous ignorons si ce nombre est premier, mais rien ne s'oppose à ce qu'il le soit. Des formules d'analyse bien connues permettent, au cas où N serait premier, de calculer approximativement son rang dans la suite des nombres premiers ; on sera certain que ce rang est compris entre $a - b$ et $a + b$, b étant assez petit par rapport à a. Si donc nous définissons N' comme le nombre premier dont le rang est a, il est possible que N' soit égal là N, mais il est possible aussi que ces nombres ne soient pas égaux ; dans l'état actuel de la science, les calculs nécessaires pour en décider sont pratiquement inexécutables. Doit-on cependant regarder N' et N comme bien définis ?

La même question peut se poser sous une forme différente, pour les nombres irrationnels, même dans le cas où leur hauteur est relativement faible.

Si deux tels nombres a et b sont définis d'une manière simple, permettant leur calcul méthodique, comme c'est le cas pour e, π, π^2, ... par exemple, on pourra bien, s'ils sont inégaux, s'en apercevoir au bout d'un nombre fini d'opérations ; mais, s'ils sont égaux, on ne pourra jamais en être certain, si on ne sait pas le démontrer par une méthode analytique ; en effet, la coïncidence d'un nombre quelconque de décimales ne suffit pas à le démontrer.

On a par exemple :

$$\pi = 3{,}1415926...$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929...$$

Si l'on avait calculé seulement 6 décimales, on aurait pu croire que ces nombres étaient égaux, De même, certains chercheurs de la quadrature du cercle, ayant constaté que l'on a :

$$\pi = 3{,}14...$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14...$$

en concluent que ces deux nombres sont égaux.

Dans les deux cas précédent, celui qui sait que la quadrature du cercle est impossible, puisque π ne peut être racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers, pouvait affirmer sans aucun calcul que les deux nombres dont les premières décimales étaient les mêmes n'étaient certainement pas égaux, mais il est fort rare qu'une démonstration de ce genre puisse être utilisée.

Il y a bien des manières de définir le nombre π par une série ou par une intégrale définie, si l'on pose

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...$$

$$t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

On sait que l'on a : $s = \frac{\pi}{4}$; $t = \frac{\pi}{2}$.

Supposons que des mathématiciens, ne connaissant pas les résultats précédents, aient eu la curiosité de calculer avec un grand nombre de décimales exactes la valeur de $2s$ et celle de t. Ils auraient constaté, par exemple, que les vingt premières décimales de ces valeurs sont les mêmes. Auraient-ils pu en conclure, sans pousser plus loin les calculs que $2s$ est rigoureusement égal à t ?

Dans l'état actuel de la science, la réponse à une telle question doit être négative ; et, cependant, il n'est pas douteux que le mathématicien qui aurait obtenu un tel résultat se serait empressé de rechercher une démonstration rigoureuse de l'égalité $2s = t$ et, s'il ne l'avait pas obtenue immédiatement, aurait posé ce problème à d'autres mathématiciens, jusqu'à ce que la démonstration fût trouvée, car, à défaut de démonstration rigoureuse, il aurait été néanmoins persuadé que cette coïncidence des premières décimales n'était pas fortuite et que les décimales suivantes coïncideraient aussi.

Il serait cependant absurde de prétendre que, si deux nombres irrationnels ont un grand nombre de chiffres décimaux communs, ils sont nécessairement égaux ; rien ne nous empêche, en effet, de définir un nombre irrationnel *x* comme étant obtenu en augmentant ou diminuant d’une unité le millième chiffre décimal de π ; le nombre *x* et π ont ainsi 999 chiffres décimaux communs et ne sont cependant pas égaux.

La grande différence qu’il y a entre la comparaison entre 2*s* et *t* et la comparaison entre *x* et π, c’est que dans le premier cas, nous avons affaire à des nombres définis d’une manière simple, au moyen de formules qui peuvent s’énoncer en peu de mots, tandis que le nombre *x* se déduit de π d’une manière artificielle et la définition même de *x* entraîne le fait que *x* n’est pas égal à π.

Il serait donc fort intéressant de démontrer une proposition générale qui permettrait, dans des cas intéressants analogues à celui de 2*s* et *t*, d’affirmer avec certitude ce que chacun pressent comme vrai. Il faudrait, pour cela, partir des remarques suivantes. Après avoir défini avec précision la hauteur d’un nombre irrationnel, on constaterait que le nombre des nombres dont la hauteur est inférieure à *h* est certainement fini.

Par suite, la plus petite différence entre deux de ces nombres est une quantité φ (*h*) qui peut être très petite, mais qui n’est pas nulle. Il s’agirait de déterminer la fonction φ (*h*) ou tout au moins, une fonction *f* (*h*) telle que *f* (*h*) soit certainement inférieure à φ (*h*). Dès lors, si deux nombres de hauteur inférieure à *h*, définis par des méthodes différentes, avaient une différence inférieure à *f* (*h*) on pourrait être certain qu’ils sont rigoureusement égaux.

Les théorèmes de Liouville sur les nombres algébriques et des travaux plus récents (4) sur le nombre e sont un premier pas vers la détermination de la fonction *f* (*h*). Cette détermination marquerait un progrès très important dans notre connaissance des propriétés arithmétiques des nombres.

V

Je voudrais, en terminant, dire deux mots des « définitions » que l’on peut appeler énigmatiques, c’est-à-dire qui supposent résolue une énigme dont nous n’avons pas la clef. Certaines de ces définitions sont d’apparence mathématique ; parfois, on peut espérer que les progrès de la science permettront de résoudre l’énigme, bien que cela paraisse bien improbable.

Définissons, par exemple, le nombre *x* de la manière suivante : dans le développement décimal de π, nous remplaçons le milliardième chiffre par un zéro ; donc si ce chiffre.est un zéro, *x* sera égal à π, sinon *x* diffère de π. Les adeptes de la logique brouwérienne diraient que nous sommes dans un cas où ne s’applique pas le principe du tiers exclu et qu’aucune des deux propositions, *x* égale π et *x* diffère de π, n’est ni vraie ni fausse.

Le cas ou l’énigme posée est sans rapport avec les mathématiques est encore moins intéressant ; ce n’est pas définir un nombre que de dire qu’il est égal à 0 ou à 1 suivant que le nombre des Français tués à la bataille de Waterloo était pair ou impair, ou suivant que Bacon fut ou ne fut pas le collaborateur de Shakespeare.

On pourrait même « définir » un nombre par ses chiffres décimaux successifs, la valeur de chacun de ces chiffres dépendant de la solution d’une énigme scientifique ou historique. La connaissance de ce nombre donnerait donc la solution de toutes les énigmes, en infinité dénombrable, qui peuvent être posées dans le domaine de la science, de la curiosité, de l’histoire et de la métaphysique. Tout cela est pure fantaisie.

L’intéressant domaine de recherches qui reste ouvert aux mathématiciens à propos de la définition des nombres et des autres êtres mathématiques est assez vaste pour qu’on s’abstienne de chercher à l’étendre artificiellement.

---

(1) La somme réelle de 2100 + 3117 serait un nombre à définition naturelle.

(2) Si l’on considère un nombre N, pris au hasard, il y a de grandes chances pour qu’il admette un certain nombre de facteurs premiers inférieurs à 1 000 ou à 10 000. Il ne sera pas très compliqué de trouver ces facteurs premiers et l’on obtiendra ainsi assez vite, en divisant N par ces facteurs premiers un nombre sensiblement plus petit. Mais, si N est premier, ou admet plusieurs facteurs premiers assez grands, les calculs sont pratiquement inexécutables.

(3) J’emploie ici le langage géométrique équivalent au langage arithmétique définir un point est la même chose que définir le nombre qui est égal à l’abscisse de ce point.

(4) Voir Émile Borel « Sur la nature arithmétique du nombre e ». Comptes rendus Acad. des Sc., t. CXXVIII, p. 1281.
On pourra voir aussi Émile Borel « Sur l’approximation les uns par les autres de nombres rationnels ou incommensurables appartenant à des ensembles énumérables donnés » (C.R., t.CLXXVI, p.66).