1ère S1

Contrôle du vendredi 18 octobre 2013 (30 min)

Prénom : …………………………………….………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note également Γ la courbe représentative de la fonction « valeur absolue » dans ce repère.

1°) Le but de cette question est de déterminer « par le calcul » la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

• Compléter le raisonnement suivant :

Soit x un réel quelconque.

On a : $1>0$.

Donc on les inégalités successives suivantes (après le « car », justifier au moyen du sens de variation d'une fonction de référence) :

x^2+1 …. x^2

$\sqrt{x^2+1}$ … $\sqrt{x^2}$ car …...………...……………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………...……………………...…….

$\sqrt{x^2+1}$ … $|\,x\,|$

On en déduit que pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2+1}$ … $|\,x\,|$ soit $f\left(x\right)$ … $|\,x\,|$ (1).

• Compléter la phrase suivante par « strictement au-dessus » ou « strictement au-dessous ».

D'après l'inégalité (1), $\mathscr{C}$ est ………………………………………………….. de Γ sur $\mathbb{R}$.

• Vérifier graphiquement en traçant les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sur l'écran de la calculatrice.

2°) On considère l'équation $f\left(x\right)=3-\dfrac{x}{2}$ (E).

On note α la solution positive de (E).
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de α.

La valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de α est …………………… .

II. (4 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \geqslant x+2$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

………………………………………………………..

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S_1 =$ …………….. .

2°) On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{2-x}=2$ (2).

Lire et comprendre le début de la résolution de (2) donnée ci-dessous ; achever la résolution.

(2) est successivement équivalente à :

$\sqrt{2-x}-\left(2-x\right)=0$

$\sqrt{2-x}-\left(\sqrt{2-x}\right)^2=0$

$\sqrt{2-x}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0$

$\sqrt{2-x}=0$ ou $1-\sqrt{2-x}=0$

$2-x=$ .... ou $\sqrt{2-x}=$ ....

$x=$ .... ou $2-x=$ ....

$x=$ .... ou $x=$ ....

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2 =$ …………….. .

III. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ définie sur $E=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

1°) Démontrer que pour tout $x \in E$, on a : $f\left(x\right)=1+\dfrac{2}{x-1}$.

………

………

………

………

2°) Étudier les variations de f sur E en complétant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$		0	
$\frac{1}{x-1}$		$\|\|$	
$\frac{2}{x-1}$		$\|\|$	
$f(x)$		$\|\|$	

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ définie sur $F =]-\infty\,;-1] \cup]1\,;+\infty[$.

On notera que pour tout $x \in F$, on a $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

On cherche le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Compléter les phrases suivantes.

f est ……………………………………………………… sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

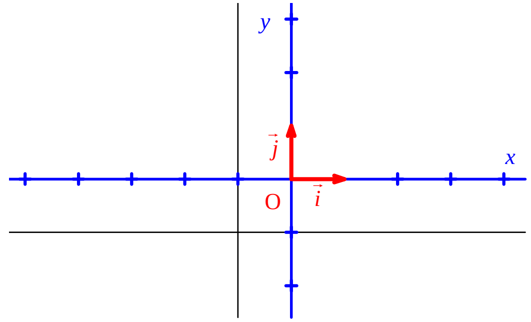
Donc g est ……………………………………………………… sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

IV. (4 points)

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note E l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que l'on ait $xy + x + y + 1 = 0$.

Un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour tracer l'ensemble E et obtenu le graphique suivant.
Expliquer ce graphique ; on précisera en particulier la nature précise de E.



On utilisera un raisonnement par « chaîne d'équivalences » en adoptant le modèle de rédaction ci-dessous :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si ………………..

si et seulement si ………………..

si et seulement si ………………..

………

………

………

………

………

………

………

………

Bonus :

Justifier l'égalité $99\,999\,999^2 + 20\,000^2 = 100\,000\,001^2$.

Corrigé du contrôle du 18-10-2013

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note également Γ la courbe représentative de la fonction « valeur absolue » dans ce repère.

1°) Le but de cette question est de déterminer « par le calcul » la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

• Compléter le raisonnement suivant :

Soit x un réel quelconque.

On a : $1 > 0$.

Donc on les inégalités successives suivantes (après le « car », justifier au moyen du sens de variation d'une fonction de référence) :

$x^2+1 > x^2$

$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$ car **la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$** (on s'assure au préalable que x^2 et x^2+1 sont tous deux positifs ou nuls).

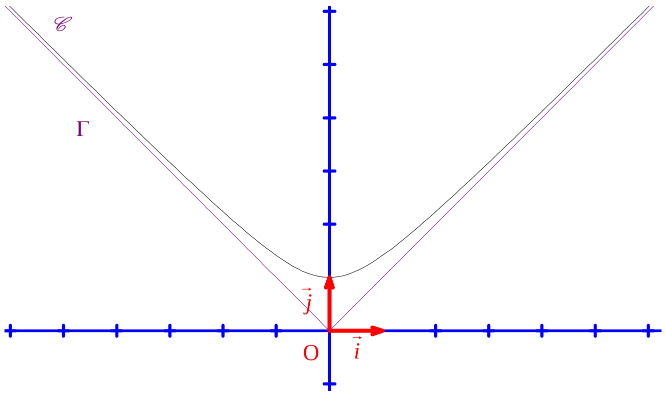
$\sqrt{x^2+1} > |x|$

On en déduit que pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2+1} > |x|$ soit $f(x) > |x|$ (1).

• Compléter la phrase suivante par « strictement au-dessus » ou « strictement au-dessous ».

D'après l'inégalité (1), $\mathscr{C}$ est **strictement au-dessus** de Γ sur $\mathbb{R}$.

• Vérifier graphiquement en traçant les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sur l'écran de la calculatrice.



2°) On considère l'équation $f(x) = 3 - \dfrac{x}{2}$ (E).

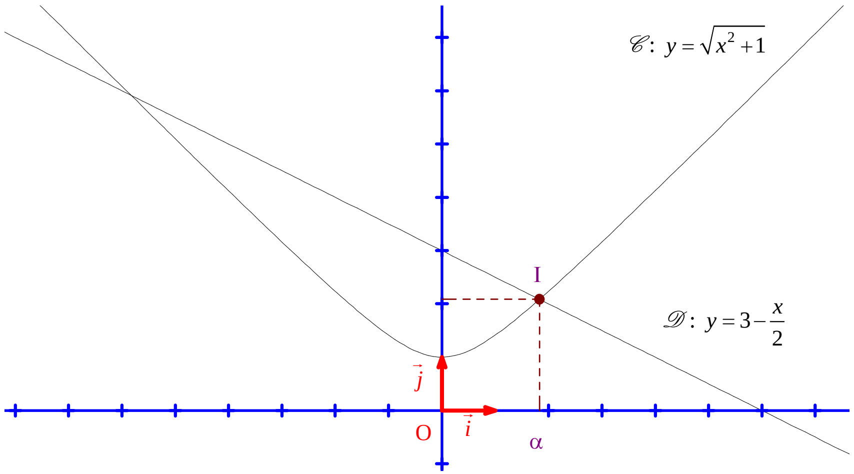
On note α la solution positive de (E).

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de α.

On peut buter sur le terme « solution positive » : il s'agit de la solution strictement supérieure à 0.
En effet, comme on le voit graphiquement, l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: l'une qui est strictement supérieure à 0, l'autre qui est strictement inférieure à 0.

On trace sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la représentation graphique $\mathscr{D}$ de la fonction $g : x \mapsto 3 - \dfrac{x}{2}$ (g est affine donc sa représentation graphique est une droite).

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques de f et g.
On utilise la commande spéciale sur calculatrice permettant de déterminer des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection de deux représentations graphiques de fonctions.



Sur calculatrice TI, on procède ainsi.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ puis on sélectionne 5 : intersect.

Les deux courbes se réaffichent à l'écran.
La calculatrice va poser des questions :

courbe 1 ? (correspondant à la première fonction rentrée)
Un curseur apparaît sur cette courbe.
Ce curseur doit être positionné à gauche du point d'intersection dont on cherche les coordonnées.
Si ça n'est pas le cas, on le déplace avec les touches de déplacement horizontal vers la gauche ou vers la droite.
On appuie sur $\boxed{\text{entrer}}$.

Ensuite, une nouvelle question apparaît à l'écran :
Courbe 2 ? (correspondant à la deuxième fonction rentrée)
Même démarche.
On appuie sur $\boxed{\text{entrer}}$.

Une nouvelle question s'affiche :
Valeur Init ? Il n'y a rien à faire. On appuie sur $\boxed{\text{entrer}}$.
Le curseur vient se positionner automatiquement sur le point d'intersection dont on cherche les coordonnées.

En bas de l'écran, on lit l'affichage suivant :
Intersection
X = 1,8297084   Y = 2,0851458

On a donc $1{,}8297 \leqslant \alpha < 1{,}8298$.
Par conséquent, la valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de α est **1,8297**.

Pour la deuxième point d'intersection, on refait la même chose (l'énoncé demandait uniquement une valeur approchée de la solution positive de (E) donc ce travail n'était pas à faire).

Complément :

Il est possible de déterminer la valeur exacte de α.
En effet, (E) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} x^2+1=\left(3-\dfrac{x}{2}\right)^2 \\ 3-\dfrac{x}{2}\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+1=9-3x+\dfrac{x^2}{4} \\ x\leqslant 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x^2+3x-8=0 \\ x\leqslant 6 \end{cases}$$

$$\Delta=3^2-4\times\frac{3}{4}\times(-8)=9+24=33$$

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{-6+2\sqrt{33}}{3} \qquad x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{-6-2\sqrt{33}}{3}$$

On a donc : $\alpha=\dfrac{-6+2\sqrt{33}}{3}$.

II.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(\sqrt{x}+1\right)^2\geqslant x+2$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x+2\sqrt{x}+1\geqslant x+2$
$2\sqrt{x}\geqslant 1$
$\sqrt{x}\geqslant\dfrac{1}{2}$
$x\geqslant\dfrac{1}{4}$ (on peut élever au carré les deux membres car ils sont tous deux positifs ou nuls)

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S_1=\left[\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

2°) On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{2-x}=2$ (2).

Lire et comprendre le début de la résolution de (2) donnée ci-dessous ; achever la résolution.

(2) est successivement équivalente à :

$\sqrt{2-x}-(2-x)=0$

$\sqrt{2-x}-\left(\sqrt{2-x}\right)^2=0$

$\sqrt{2-x}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0$

$\sqrt{2-x}=0$ ou $1-\sqrt{2-x}=0$

$2-x=0$ ou $\sqrt{2-x}=1$

$x=0$ ou $2-x=1$

$x=0$ ou $x=1$

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S_2=\{1\,;2\}$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

f est une fonction homographique.

1°) Démontrer que pour tout $x \in E$, on a : $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$.

$$\forall x \in E \quad f(x) = \frac{x-1+2}{x-1}$$

$$= \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$= 1 + \frac{2}{x-1}$$

On a déterminé la forme canonique de *f*.

Autre méthode :

$$\forall x \in E \quad 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= f(x)$$

2°) Étudier les variations de f sur E en complétant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$	↗	$-$	0	$+$	↗
$\dfrac{1}{x-1}$	↘		‖		↘
$\dfrac{2}{x-1}$	↘		‖		↘
$f(x)$	↘		‖		↘

Les signes + et – dans le tableau de variations montrent que :

- la restriction de la fonction $x \mapsto x-1$ à l'intervalle $]-\infty\,;1[$ est à valeurs négatives (ou à valeurs dans $]-\infty\,;0[$) ;

- la restriction de la fonction $x \mapsto x-1$ à l'intervalle $]1\,;+\infty[$ est à valeurs positives.

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ définie sur $F =]-\infty\,;-1] \cup]1\,;+\infty[$.

On notera que pour tout $x \in F$, on a $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

On cherche le sens de variation de *g* sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Compléter les phrases suivantes.

f est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

La restriction de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ à l'intervalle $]1\,;+\infty[$ est à valeurs positives ou nulles.

Donc *g* est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

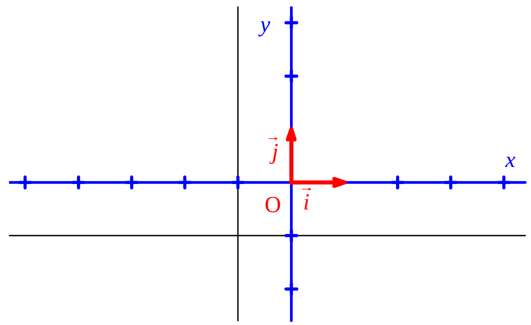
IV.

Le plan est muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note *E* l'ensemble des points M de coordonnées (*x* ; *y*) tels que l'on ait $xy + x + y + 1 = 0$.

Un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour tracer l'ensemble *E* et obtenu le graphique suivant.

Expliquer ce graphique ; on précisera en particulier la nature précise de *E*.



Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x ; y).

M $\in E$ si et seulement si $xy+x+y+1=0$

si et seulement si $x(y+1)+y+1=0$

si et seulement si $\underline{(y+1)}\times x+\underline{(y+1)}\times 1=0$

si et seulement si $(x+1)(y+1)=0$ (factorisation ; le facteur commun est souligné)

si et seulement si $x+1=0$ ou $y+1=0$

si et seulement si $x=-1$ ou $y=-1$

E est la réunion des droites d'équations $x=-1$ et $y=-1$.

Le résultat est en accord avec le graphique.

On peut écrire $E=D\cup D'$ où D et D' sont les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=-1$.

Bonus :

Justifier l'égalité $99\ 999\ 999^2+20\ 000^2=100\ 000\ 001^2$.

$A=100\ 000\ 001^2-99\ 999\ 999^2$

$=(100\ 000\ 001-99\ 999\ 999)(100\ 000\ 001+99\ 999\ 999)$

$=2\times 200\ 000\ 000$

$=400\ 000\ 000$

$=20\ 000^2$

On a : $100\ 000\ 001^2-99\ 999\ 999^2=20\ 000^2$ donc $99\ 999\ 999^2+20\ 000^2=100\ 000\ 001^2$.

Appendice

Je propose des versions sèches des exercices I, II, IV tels qu'ils auraient pu être posés et tels qu'il faudrait savoir les faire.

I.

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et Γ la courbe représentative de la fonction « valeur absolue ».

Étudier algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
Vérifier graphiquement en traçant les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sur l'écran de la calculatrice.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1°) Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$.

2°) Étudier les variations de f sur E dans un tableau.

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition F de g.

b) Déterminer les variations de g sur F.

IV.

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer et tracer l'ensemble E des points M de coordonnées (x ; y) tels que l'on ait $xy+x+y+1=0$.