TS — Exercices sur les limites de fonctions (2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{19}$, déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction *f* et déterminer la limite demandée en précisant chaque fois si l'on rencontre une forme indéterminée.

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$; $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{1} f$.

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; $\lim\limits_{1} f$.

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{6}$ $f(x)=\sqrt{x+4}-x$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{8}$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{9}$ $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{+\infty} f$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

$\boxed{10}$ $f(x)=\ln(2x+3)-\ln(x+1)$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{11}$ $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{0^-} f$.

$\boxed{12}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{5x}$; $\lim\limits_{0} f$ à l'aide du changement de variable $X=2x$.

$\boxed{13}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}{5x}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{14}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$.

$\boxed{15}$ $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{17}$ $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{18}$ $f(x)=\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{3}} f$. On pourra utiliser un taux de variation.

$\boxed{19}$ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$; $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$.

$\boxed{20}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

Quelques aides

$\boxed{1}$ Quantité conjuguée.

$\boxed{2}$ Quantité conjuguée et factorisation.

$\boxed{3}$ Quantité conjuguée.

$\boxed{4}$ Factorisation.

$\boxed{5}$ Factorisation.

$\boxed{6}$ Factorisation.

$\boxed{7}$ Factorisation.

$\boxed{8}$ Factorisation.

$\boxed{9}$ Changement de variable.

$\boxed{10}$ Écriture en un seul logarithme népérien.

$\boxed{11}$ Changement de variable.

$\boxed{12}$ Changement de variable.

$\boxed{13}$ Factorisation.

$\boxed{14}$ Élimination de la racine au dénominateur puis changement de variable.

$\boxed{15}$ Changement de variable.

$\boxed{16}$ Changement de variable.

$\boxed{17}$ Autre écriture du numérateur.

$\boxed{18}$ Taux de variation.

$\boxed{19}$ Écriture en produit.

$\boxed{20}$ 2°) Quantité conjuguée.

Consigne générale de présentation : tirer les traits de fractions à la règle.

Corrigé

$\boxed{1}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Solution détaillée :

• **En $+\infty$,** on effectue une réécriture $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$ (tirer le trait de fraction à la règle)

On utilise la limite d'un quotient.

On peut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=+\infty$ en une seule étape (inutile de détailler)

Commentaire :

On fait un « quotient ». On simplifie. Ça permet de faire disparaître le x au numérateur qui nous gêne.

• **En $-\infty$,** on utilise l'écriture de base (inutile d'effectuer une réécriture).
On utilise la limite d'une somme (ou d'une différence).

Solution un peu plus détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{4x^2+1}-2x$

$f(x)$ existe si et seulement si $4x^2+1\geq 0$ (toujours vrai)

N.B. : On peut pousser jusqu'à : $x^2\geq -\dfrac{1}{4}$, inégalité qui est toujours toujours vraie.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Limite en + ∞

On rencontre une FI du type « $\infty-\infty$ ».

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\times\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$ (quantité conjuguée)

$$=\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Limite en – ∞

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Autre piste pour déterminer la limite de *f* en + ∞ :

On pourrait essayer de mettre en facteur x^2 sous la racine.

Pour $x\neq 0$, on a : $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$

$$=\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-2x$$

$$=\sqrt{x^2}\times\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x$$

(on peut séparer les racines carrées car les deux quantités sont positives ou nulles)

$$=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x$$

Donc $\forall x>0 \quad f(x)=x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)=0\end{array}\right\}$ On retrouve une FI du type « $0\times\infty$ ».

La transformation n'est donc pas intéressante pour la limite de *f* en + ∞.

Pour la limite de *f* en – ∞, cette transformation ne présente aucun intérêt.

$\boxed{2}$ $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x\geq 0$
si et seulement si $x(x+2)\geq 0$

On fait un tableau de signes et on obtient $\mathcal{D}_f = \left]-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right[$.
(On peut aussi dire que $x(x+2)$ est un trinôme du second degré dont les racines 0 et – 2 ; on peut appliquer la règle du signe d'un trinôme du second degré).

Attention, ce qui fait la difficulté de cet exercice, c'est qu'on combine quantité conjuguée et factorisation.

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$ si $x>0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

Solution un peu plus détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x}-x$

1°) Attention pour la recherche de l'ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x \geq 0$

si et seulement si $x(x+2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
SGN de x		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-2] \cup [0\,;+\infty[$

2°) En $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\infty - \infty$ ».

On effectue une réécriture.

$$\forall x>0 \quad f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} \qquad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2x\cancel{-x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x} \qquad \text{(factorisation sous la racine)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{|\,x\,|\times\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)=2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

$\boxed{3}$ $\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{2}\,;1\right[\cup]1\,;+\infty[$; $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}$ (tirer les traits de fraction à la règle) ; $\boxed{\lim\limits_{1} f = -\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

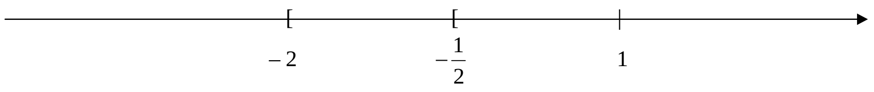
Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -2 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (on a réduit au maximum le système de conditions)

Il n'est pas obligatoire de tracer la droite réelle ci-dessous mais la droite est une aide visuelle (la droite est très pratique pour visualiser).



Donc : $\boldsymbol{D}_f = \left[-\dfrac{1}{2};1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

Limite de *f* en 1

On rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue une réécriture (quantité conjuguée).

$$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \quad f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= \frac{x+2-(2x+1)}{(x-1)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= \frac{-x+1}{(x-1)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$; $f(x) = \dfrac{x+5}{x+1}$; $\boxed{\lim\limits_{1} f = 3}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2-1 \neq 0$

si et seulement si $x^2 \neq 1$

si et seulement si $x \neq 1$ ou $x \neq -1$

Donc : $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;-1\}$.

Limite de *f* en 1

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+4x-5\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right) = 0 \end{array}\right\}$ donc on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On procède à une réécriture (factorisation).

Les racines du polynôme x^2+4x-5 sont 1 et – 5 (on utilise la racine 1 comme racine évidente puis le produit des racines pour trouver – 5 ou bien on utilise le discriminant qui est égal à $\Delta = 36$).

$$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \quad f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \frac{x+5}{x+1}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1}(x+5) = 6 \\ \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{6}{2} = 3$.

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}_+$; f n'est pas une fonction rationnelle (c'est une fonction irrationnelle à cause de la racine carrée) ;

$f(x) = \dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ si $x > 0$; $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$.

Une aide pour la transformation d'écriture : $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$

Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \neq -1 \quad \text{toujours vrai} \end{cases}$

Donc : $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}_+$

Limite de *f* en + ∞

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+\sqrt{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty \end{array}\right\}$ donc on rencontre une FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On procède à une réécriture (factorisation).

$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{x+\frac{1}{x}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{6}$ $\boldsymbol{D}_f = [-4\,;+\infty[$; $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - \sqrt{x}\right)$ si $x > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ (« (– ∞) × (+ ∞) » ce n'est pas une FI ; ça fait – ∞).

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{x+4} - x$

$f(x)$ existe si et seulement si $x + 4 \geqslant 0$ (le radicande doit être positif ou nul)

si et seulement si $x \geqslant -4$

$\boldsymbol{D}_f = [-4\,;+\infty[$

On cherche la limite en + ∞.

On rencontre une FI du type « ∞ – ∞ ».

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$: on est obligé de prendre $x > 0$ à cause de la séparation des racines. Ce n'est pas grave puisqu'on étudie la limite en + ∞.

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \sqrt{x+4} - x$

$= \sqrt{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} - x$

$= \sqrt{x} \times \sqrt{1+\frac{4}{x}} - \sqrt{x} \times \sqrt{x}$

$= \sqrt{x} \times \left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - \sqrt{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - \sqrt{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$\boxed{7}$ $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ si $x > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+1 \geqslant 0$ (toujours vrai)

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

On cherche la limite en + ∞.

On rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

8 $\boldsymbol{D}_f=\left]-1\,;+\infty\right[$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\sqrt{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}}$ (on observera que la séparation des racines est bien licite car les deux facteurs x et $1+\dfrac{1}{x}$ sont positifs pour $x>0$) ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

9 $\boldsymbol{D}_f=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ (il faut faire un tableau de signes) ; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

10 $\boldsymbol{D}_f=\left]-1\,;+\infty\right[$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2}$ (limite d'une composée).

11 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ (avec changement de variable) et $\lim\limits_{0^-} f=0$ (directement, sans changement de variable)

Solution détaillée :

$f: x\mapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Limite de f en 0^+

Quand $x\to0^+$, on rencontre une FI du type « $0\times\infty$ ».

On utilise le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

$(x\to0^+)\Leftrightarrow(X\to+\infty)$

$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}$; $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$ (limite de référence) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty}$

Limite de f en 0^-

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} x=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0 \text{ (limite d'une composée*)}\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0}$.

Détail de $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$:

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{X}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée : $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$

12 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to0$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ » ; on pose $X=2x\Leftrightarrow x=\dfrac{X}{2}$;

$(x\to0)\Leftrightarrow(X\to0)$; $f(x)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{\mathrm{e}^X-1}{X}$; on utilise $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\mathrm{e}^X-1}{X}=1$ (limite de référence).

C'est bien $f(x)$ qu'on écrit et non $f(X)$.

On trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=\dfrac{2}{5}}$.

Autre méthode : écrire $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}{5x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\times\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{5}$. On utilise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

13 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to0$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ » ; réécriture : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{5}\times\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$; on utilise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$ (limite de référence) ; on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=\dfrac{1}{5}}$.

14 $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+^*$; quand $x\to0^+$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ » ; réécriture : $f(x)=\sqrt{x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$;

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=1 \text{ (limite de référence)}\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0}$.

Solution détaillée pour l'ensemble de définition :

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}\sqrt{x}\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}$ (la racine carrée doit exister et le dénominateur doit être non nul)

si et seulement si $\begin{cases}x\neq 0\\ x\geq 0\end{cases}$

si et seulement si $x>0$

$\boxed{15}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^*$; quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; changement de variable : $X=\sqrt{x}$;

$(x\to 0^+)\Leftrightarrow(X\to 0^+)$; $f(x)=\frac{\sin X}{X}$; $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\sin X}{X}=1$ (limite référence) de donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$;

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1}$.

$\boxed{16}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; changement de variable $X=3x$;

$(x\to 0)\Leftrightarrow(X\to 0)$; réécriture : $f(x)=3\frac{\sin X}{X}$; $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$ (limite de référence) ; $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3}$.

Attention, $\sin 3x\neq 3\sin x$. On peut retenir les formules suivantes :
$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ et $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ (démonstration : écrire que $\cos(3x)=\cos(2x+x)$ puis utiliser les formules d'addition puis de duplication).

$\boxed{17}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ;

$f(x)=\frac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$; $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2}$ (rappel de formules de trigonométrie à savoir par cœur avec les formules de duplication du cosinus $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$)

$\boxed{18}$ **Solution détaillée :**

$f: x\mapsto\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x-\frac{\pi}{3}\neq 0$

si et seulement si $x\neq\frac{\pi}{3}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$; quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; limite par taux de variation.

$f(x)=\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$; on considère la fonction $u: x\mapsto\cos x$.

$$f(x)=\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{u(x)-u\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=u'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Rappel à détailler :

Lorsque u est dérivable en a, $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(a)$ (définition du nombre dérivé).

Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{19}$ $\mathcal{D}_f=\left]-1\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$; quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; on effectue le changement d'écriture : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x}$; on utilise $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (limite de référence) et on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty}$; de même, on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty}$.

Solution détaillée :

$f: x\mapsto\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

(Attention à bien analyser les types de problèmes qui se posent : le dénominateur ne doit pas être nul, ce qui est à l'intérieur du ln doit être positif ou nul.)

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}1+x>0\\ x\neq 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x>-1\\ x\neq 0\end{cases}$

$\mathcal{D}_f=\left]-1\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$

Quand $x\to 0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ ».

On effectue le changement d'écriture : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (limite de référence).

On est obligé de distinguer deux cas : limite à droite et à gauche en 0 pour la limite de $\frac{1}{x}$.

Limite en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\ \ \text{(limite de référence)}\end{array}\right\}\ \text{donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty.$$

Limite en 0^- :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\ \ \text{(limite de référence)}\end{array}\right\}\ \text{donc par limite d'un produit, } \boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty}.$$

20 $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$

Solution détaillée :

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+x+1\geq 0$.

Considérons le polynôme x^2+x+1.
Son discriminant est égal à $\Delta=-3$.
$\Delta < 0$.
Par conséquent, le polynôme est toujours strictement positif : $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2+x+1>0$.

☐ Logique : il n'est pas nécessaire de dire que le polynôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2°) Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

N.B. : ne pas écrire $f(x)-y$ où y est sensé remplacer $x+\dfrac{1}{2}$.

Les traits de fraction et de racines carrées doivent être faits à la règle.
Les calculs sont assez longs. Il faut faire preuve de persévérance !

$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)&=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}{1}\\
&=\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{1\times\left[\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}\\
&=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\\
&=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\\
&=\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\\
&=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\dfrac{1}{2}\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right)=0$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]=0$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

On peut « vérifier » ce résultat en traçant la courbe sur calculatrice ou sur ordinateur.