1ère S1

Contrôle du jeudi 23 mai 2013 (3 heures 30)

Le barème est donné sur 40.

I. (10 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (6 points)

Un client place 3000 € le 1er janvier 2000 sur un compte bancaire rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.

1°) Pour tout entier naturel n, on note C_n la somme disponible en euros sur ce compte le 1er janvier de l'année $(2000+n)$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n, C_{n+1} en fonction de C_n.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 3000\times 1,025^n$.

2°) On donne l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir un nombre S strictement supérieur à 3000

Initialisations :
n prend la valeur 0
U prend la valeur 3000

Traitement :
Tantque $\text{U} \leqslant \text{S}$ **Faire**
  n prend la valeur $n+1$
  U prend la valeur $\text{U}\times 1,025$
FinTantque

Sortie :
Afficher le nombre $2000+n$

a) Pour la valeur $\text{S}=3300$ saisie en entrée, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant :

Étape	1	2	…………..	
Condition $\text{U} \leqslant \text{S}$		vraie	…………..	
Valeur de n	0		…………..	
Valeur de U	3000		…………..	

Aucune explication n'est demandée. Les valeurs de U seront éventuellement arrondies au centième.
En déduire l'affichage obtenu en sortie quand la valeur S saisie en entrée est 3300.

b) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit en entrée un nombre S strictement supérieur à 3000.
c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, à partir du 1er janvier de quelle année, le capital final de ce client sera strictement supérieur à 10 fois le capital initial. Aucune explication n'est demandée.

Partie 2 (4 points)

Dans cette partie, on suppose qu'un client place le 1er janvier 2000, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %, une somme de a € ($a>0$).
De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il place 1000 € sur ce compte.
Pour tout entier naturel n, on note U_n la somme disponible en euros sur ce compte le 1er janvier de l'année $(2000+n)$.
Ainsi, $U_0 = a$.

1°) Justifier brièvement, que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 1,025U_n + 1000$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose : $V_n = U_n + 40000$.
a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son terme initial V_0.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = 1,025^n \times (a+40000) - 40000$.
c) Déterminer, à un euro près par excès, le placement initial minimal a permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 10 000 €.

II. (5 points = 3 points + 2 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ de la manière suivante : ses treize premiers termes u_1, u_2, …, u_{13} forment une suite arithmétique de raison r $(r\neq 0)$; à partir de u_{13}, ses termes constituent une suite géométrique de raison $\frac{1}{r}$ (donc, en particulier : $u_{13} = u_{12} + r$ et $u_{14} = u_{13}\times\frac{1}{r}$).

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Calculer r, u_{13} et u_1 sachant que l'on a : $u_1 = -2r$ et $u_{17} = -\frac{5}{32}$.

2°) Dans cette question, on prend $u_1 = -1$ et $r = 2$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Exprimer S_n en fonction de n en distinguant deux cas :

1er cas : $n \leqslant 13$;

2e cas : $n > 13$.

Dans chaque cas, on attend une expression en fonction de n.

On donnera les résultats sous forme simplifiée.

III. (9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne le point $I(0\,;4)$.

Aucune figure n'est demandée sur la copie. Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (7 points)

1°) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient $x^2+y^2+4x=0$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre Ω et le rayon.

2°) Soit D_m la droite passant I et de coefficient directeur m (m étant un réel quelconque).

a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et de D_m sont les solutions de l'équation $\left(1+m^2\right)x^2+4(2m+1)x+16=0$ (E).
b) Calculer le discriminant réduit Δ' de (E) (expression simplifiée en fonction de m).
c) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m (on ne demande pas l'expression des abscisses des points d'intersection éventuels).

Partie 2 (2 points)

On note J le point d'abscisse strictement positive tel que le triangle OIJ soit équilatéral et K le point tel que $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{JO}$. On rappelle que O est l'origine du repère.

On demande de répondre aux deux questions de cette partie sans utiliser les coordonnées : on pourra cependant utiliser les coordonnées des points déjà données mais on ne calculera pas de nouvelles coordonnées.

1°) Calculer la distance IK (valeur exacte) en utilisant une relation métrique (on ne calculera pas les coordonnées de J ni celles de K).

2°) Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{OKI}$.

IV. (7 points)

Lors d'un concours, les candidats sont soumis à un Q.C.M. comportant 20 questions indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Toute réponse juste rapporte un point et une réponse fausse enlève 0,5 point. Le total des points, positif ou négatif, est donné sur 20. Un candidat est reçu lorsqu'il a la moyenne c'est-à-dire lorsqu'il obtient un total supérieur ou égal à 10.
On suppose que :
- la probabilité que le candidat donne la bonne réponse pour chaque question est égale à p $(0<p<1)$;
- le candidat répond à toutes les questions.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de réponses justes et T la variable aléatoire qui donne le total des points obtenus.

1°) a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
b) Dans cette question, on suppose que le candidat a deux chances sur trois de donner la bonne réponse pour chaque question.
Calculer la probabilité que le candidat ait 12 réponses justes ; on se contentera de donner la valeur arrondie au millième.

2°) a) Démontrer que l'on a : $T=1{,}5X-10$.
b) Exprimer $E(X)$ en fonction de p ; en déduire $E(T)$ en fonction de p.
c) Quelle doit être la valeur de p si le candidat veut espérer obtenir un total de points de 14 en moyenne ?

3°) a) Quel est le nombre minimal de réponses correctes pour que le candidat ait un total supérieur ou égal à 10 ?
b) On considère :
- que la probabilité qu'un candidat sérieux donne une réponse correcte à une question est égale à 0,7 ;
- qu'un candidat peu travailleur répond au hasard à toutes les questions.

Les concepteurs de l'épreuve désiraient que :

- la probabilité d'accepter un candidat peu travailleur soit strictement inférieure à 0,01 ;
- la probabilité de refuser un candidat travailleur soit strictement inférieure à 0,25.

Leurs objectifs sont-ils atteints ? Justifier.

V. (9 points)

Partie 1 : (7 points)

On pose $x=\cos\frac{\pi}{5}$ et $y=\sin\frac{\pi}{5}$.

1°) Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et $\sin\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et de y.

2°) En remarquant que $\frac{3\pi}{5}=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}$, exprimer $\sin\frac{3\pi}{5}$ en fonction de x et y sous forme factorisée.

3°) Justifier que l'on a : $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$.

4°) Déduire des questions précédentes que l'on a : $4x^2-2x-1=0$.

5°) Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Partie 2 : (2 points)

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
On donne les points $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$, $A'(-1\,;0)$, $B'(0\,;-1)$ et l'on note P le milieu de [O A'].
Le cercle de centre P passant par B coupe le segment [OA] en J. On note C le milieu de [OJ].

1°) Calculer OC (valeur exacte sous forme simplifiée).

2°) La médiatrice de [OJ] coupe l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en un point M.
En utilisant la **Partie 1**, déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

3°) **Bonus (à ne chercher que si le reste du sujet a été traité) :**
Expliquer brièvement à l'aide de ce qui précède comment construire à la règle et au compas un pentagone régulier convexe inscrit dans $\mathscr{C}$ dont un sommet est A.

Corrigé du contrôle du 23 mai 2013

I.

Partie 1

C_n : somme disponible en euros sur le compte le 1er janvier de l'année $(2000+n)$

1°)

a) **Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n.**

D'après l'énoncé, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = C_n + \frac{2,5}{100} C_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = 1,025 C_n$ (1).

b) **Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n = 3\,000 \times 1,025^n$.**

D'après (1), (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 3000$ et de raison $q = 1,025$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; C_n = C_0 \times q^n$ soit $C_n = 3000 \times 1,025^n$.

Commentaires :

• Il était essentiel de dire que la suite (C_n) est géométrique pour pouvoir exprimer le terme général en fonction de n. Sinon, on considère qu'il manque une justification.

• La quantification de (1) est essentielle pour justifier que la suite (C_n) est géométrique.

2°)

• **Complétons le tableau.**

Étape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Condition $U \leqslant S$		vraie	vraie	vraie	vraie	fausse
Valeur de n	0	1	2	3	4	
Valeur de U	3000	3 075	$\approx 3151,88$	$\approx 3230,67$	$\approx 3311,44$	

Une fois que la condition est fausse, l'algorithme s'arrête. Les variables n et U n'ont plus de valeurs.
On n'écrit donc aucune valeur dans les cases (contrairement à ce que beaucoup d'élèves ont fait).

Remarques :

1. La première case est barrée car U n'existe pas quand l'algorithme commence.
La condition $U \leqslant S$ n'a donc pas lieu d'être.

2. Le tableau se lit de bas en haut.

Étape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Condition $U \leqslant S$		vraie	vraie	vraie	vraie	faux
Valeur de n	0	1	2	3	4	
Valeur de U	3000	3 075	$\approx 3151,88$	$\approx 3230,67$	$\approx 3311,44$	

3. Le choix de dénommer les étapes « étape 1 », « étape 2 », « étape 3 » peut-être critiquable car il ne correspond pas au nombre de boucles.
Ne devrait-on pas plutôt les appeler « étape 0 », « étape 1 », « étape 2 » ?
Il n'y a pas forcément de bonne solution car, au fond, qu'est-ce qu'une étape dans un algorithme de ce type ?
Peut-être serait-il préférable d'appeler les rubriques « avant le premier passage dans la boucle », « après le premier passage dans la boucle » (et donc « avant le deuxième passage dans la boucle »), « après le deuxième passage dans la boucle », …, « après le dernier passage dans la boucle »…

• **Déduisons-en l'affichage obtenu quand la valeur S saisie en entrée est 3 300.**

L'affichage obtenu quand la valeur S saisie en entrée est 3 300 est donc : 2004.

b) **Interprétons le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.**

Le nombre obtenu en sortie de cet algorithme est l'année à partir de laquelle la somme présente sur le compte sera strictement supérieure à S.

c) **Déterminons à partir du 1er janvier de quelle année, le capital final du client sera strictement supérieur à 10 fois le capital initial.**

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $C_n > 10C_0$ (2).

(2) $\Leftrightarrow 10,25^n C_0 > 10C_0$

$\quad\Leftrightarrow 1,025^n > 10 \quad$ (car $C_0 > 0$)

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $1,025^{93} \approx 9,9385$ et $1,025^{94} \approx 10,1869$.
Le plus petit entier naturel n cherché est donc $n = 94$. On en déduit qu'à partir du 1er janvier 2094, le capital final du client sera strictement supérieur à 10 fois le capital initial. On peut noter que le client sera très âgé (94 ans !), peut-être qu'il sera mort avant !

Plus précisément, l'année à partir de laquelle le capital final de ce client sera strictement supérieur à 10 fois le capital initial est 2094.

Partie 2

1°) **Justifions que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 1,025 U_n + 1000$.**

Pour justifier, on doit reprendre le texte et le traduire mathématiquement.

Pour tout entier naturel n, le capital présent à l'année $n+1$ s'obtient en tenant compte de la rémunération à 2,5 % de l'année précédente soit $U_n + \frac{2,5}{100} U_n$ et l'ajout des 1 000 €. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n + \frac{2,5}{100} U_n + 1000$$
$$= 1,025 U_n + 1000$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n + 40\,000$

a) **Démontrons que la suite (V_n) est une suite géométrique.**

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} &= U_{n+1} + 40000\\ &= 1{,}025U_n + 1000 + 40000\\ &= 1{,}025U_n + 41000\\ &= 1{,}025(U_n + 40000)\\ &= 1{,}025V_n\end{aligned}$$

On en déduit que (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = a + 40000$ et de raison $q = 1{,}025$.

(On calcule $V_0 = U_0 + 40000 = a + 40000$.)

b) **Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = 1{,}025^n \times (a + 40000) - 40000$.**

D'après la question a), (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = a + 40000$ et de raison $q = 1{,}025$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 1{,}025^n (a + 40000)$

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = V_n - 40000$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = 1{,}025^n \times (a + 40000) - 40000$.

c) **Déterminons le placement initial minimal a, permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 10 000 €.**

On cherche un réel a (strictement positif) tel que $U \geqslant 10000$ (2).

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 1{,}025^5 (a + 40000) - 40000 \geqslant 10000\\ &\Leftrightarrow 1{,}025^5 (a + 40000) \geqslant 50000\\ &\Leftrightarrow a \geqslant \frac{50000}{1{,}025^5} - 40000\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $\dfrac{50\,000}{1{,}025^5} - 40\,000 = 4192{,}7143...$.

La valeur entière approchée à l'unité par excès de $\dfrac{50\,000}{1{,}025^5} - 40\,000$ est 4 193.

Le placement initial minimal a à l euro par excès est donc de 4 193 € pour disposer d'une somme d'au moins 10 000 € sur le compte le 1er janvier 2005.
Pour avoir une somme d'au moins 10 000 € sur le compte le 1er janvier 2005, il suffit que le client ait posé une somme minimale d'au moins 4 193 €.

> **Commentaire :**
>
> Il fallait absolument passer par une inéquation (à cause du « au moins » dans l'énoncé) ; une équation ne permettait pas de répondre au problème.

II.

1°) **Calculons r, u_{13} et u_1.**

À partir de u_{13}, les termes de la suite (u_n) constituent une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{r}$ ($r \neq 0$) d'où

$u_{17} = u_{13} \times \left(\dfrac{1}{r}\right)^4 = 10r \times \left(\dfrac{1}{r}\right)^4 = \dfrac{10}{r^3}$.

Or d'après l'énoncé $u_{17} = -\dfrac{5}{32}$.

Donc on a : $\dfrac{10}{r^3} = -\dfrac{5}{32}$ soit $r^3 = -64$ donc $r = -4$.

> **Commentaire :**
>
> On aurait pu écrire $r = \sqrt[3]{-64}$.
>
> On évite cependant de parler de la racine cubique d'un nombre négatif.

Les treize premiers termes u_1, u_2, …, u_{13} forment une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$), d'où

$u_{13} = u_1 + 12r = -2r + 12r = 10r = -40$

Attention à la formule : la suite est définie à partir de u_1.

$u_1 = -2r = -2 \times (-4) = 8$

> **Commentaires :**
>
> • On sait que :
>
> $$\forall n \in \{1\,;2\,;3\,;\ldots;13\} \qquad u_n = u_1 + (n-1)r$$
>
> $$\forall n \geqslant 13 \qquad u_n = u_{13} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{n-13}$$
>
> • Attention, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$. On ne peut donc pas faire intervenir u_0 dans les formules puisque u_0 n'existe pas (faute commise par certains élèves).

2°) $u_1 = -1$; $r = 2$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k \quad (n \geqslant 1)$$

Exprimons S_n en fonction de n.

On distingue deux cas.

1er cas : $n \leqslant 13$

On peut appliquer la formule sommatoire des premiers termes d'une suite arithmétique.

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k=n\times\frac{u_1+u_n}{2}=n\times\frac{-1-1+(n-1)\times 2}{2}=n\times\frac{2n-4}{2}=n(n-2)$$

2e cas : $n>13$

On ne peut pas appliquer de formule sommatoire (car la suite est arithmétique jusqu'à l'indice 13 puis géométrique ensuite).
On est obligé de « découper » la somme en deux : on a d'abord une somme de termes d'une suite arithmétique puis une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
On applique les formules sommatoires pour chacune des deux sommes.

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=12}u_k+\sum_{k=13}^{k=n}u_k \qquad \text{(en fait } \sum_{k=1}^{k=12}u_k=S_{12}\text{)}$$

$$=12\times\frac{u_1+u_{12}}{2}+u_{13}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-13+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

(la première comporte 12 termes ; la deuxième somme comporte $n-13+1$ termes)

$$=12\times\frac{-1-1+11\times 2}{2}+23\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-12}}{\frac{1}{2}}$$

$$=120+46\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-12}\right]$$

$$=166-46\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-12}$$

Quelques commentaires :

• On peut aussi découper la somme autrement en écrivant : $S_n=\sum_{k=1}^{k=13}u_k+\sum_{k=14}^{k=n}u_k$.

$$u_{14}=u_{13}\times\frac{1}{2}=23\times\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$$

$$S_n=S_{13}+\frac{23}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-13}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=143+\frac{23}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-13}}{\frac{1}{2}}$$

$$=143+23\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-13}\right]$$

$$=166-23\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-13}$$

On montre aisément que cette dernière formule coïncide avec celle obtenue avec l'autre méthode.

• Il y a eu beaucoup d'erreurs même pour le calcul de la somme dans le premier cas (résultats inachevés).

• Pour le deuxième cas, peu d'élèves ont vu qu'il fallait « couper » la somme en deux.

• Parmi les élèves qui ont bien vu la nécessité de décomposer la somme en deux sommes, certains se sont trompés pour les calculs des deux sommes (en particulier mauvais décompte des termes).

Autre commentaire :

Il est fondamental de comprendre que la suite (u_n) est définie par deux expressions :

Il n'y a pas une seule expression.

Pas une même expression, pour tout n.

La suite est entièrement précisée par une condition.

$n \leqslant 12$	$\longrightarrow$	1 expression
$n \geqslant 13$	$\longrightarrow$	1 autre expression

III.

Partie 1

$\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 + 4x = 0$

1°) **Démontrons que l'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle.**

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2^2 + y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4\end{aligned}$$

On reconnaît une équation de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ qui est une équation du cercle de centre de coordonnées $(a\,;b)$ et de centre R.

L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(-2\,;0)$ et de rayon $R = 2$.

2°) **Démontrons que les abscisses des points d'intersection éventuel de D_m et $\mathscr{C}$ sont les solutions de l'équation $\left(1+m^2\right)x^2 + 4(2m+1)x + 16 = 0$ (E).**

D_m : droite passant I et de coefficient directeur m ($m \in \mathbb{R}$ quelconque)

Comme le point $\text{I}(0\,;4)$ appartient à D_m, on peut dire que D_m coupe l'axe des ordonnées au point I.
Par conséquent, l'ordonnée à l'origine de D_m est 4.

Ainsi D_m a pour équation $y = mx + 4$.

Les abscisses des points d'intersection éventuels de D_m et $\mathscr{C}$ sont les solutions de l'équation*
$(x+2)^2 + (mx+4)^2 = 4$ (1).

En gros, comme l'a écrit un élève dans sa copie, on remplace le y de l'équation de l'ensemble $\mathscr{C}$ par l'équation de D_m pour connaître les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et de D_m.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + m^2x^2 + 8mx + 16 = 4\\ &\Leftrightarrow x^2\left(1+m^2\right) + 4x(1+2m) + 16 = 0\end{aligned}$$

$\left(1+m^2\right)x^2 + 4(2m+1)x + 16 = 0$ (E)

Attention aux raccourcis faux que j'ai trouvés dans une copie :

« Les points d'intersection éventuels de D_m et $\mathscr{C}$ sont les solutions de l'équation… ».

b) **Calculons le discriminant réduit de (E) en fonction de m.**

(E) est une équation du second degré car le coefficient de x^2 est non nul.

Le discriminant réduit de (E) est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta' &= \left[2(2m+1)\right]^2 - \left(1+m^2\right)\times 16\\ &= 4(2m+1)^2 - 16\left(1+m^2\right)\\ &= \cancel{16m^2} + 16m + 4 - 16 \cancel{-16m^2}\\ &= 16m - 3\end{aligned}$$

Quelques commentaires :

• Beaucoup d'élèves ont écrit la formule $\Delta = b^2 - 4ac$ sans préciser les lettres a, b, c.

• Il y a eu beaucoup d'erreurs de calcul dans le calcul de ce discriminant qui ont abouti à un discriminant qui était une expression du second degré en m. Du coup, tout devenait plus compliqué et… faux !

c) **Déterminons le nombre de points d'intersection de D_m et de $\mathscr{C}$ suivant les valeurs de m.**

Le discriminant réduit est une expression du premier degré en m.

Cherchons la valeur de m qui annule Δ.

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$

La valeur de m qui annule Δ' est $\dfrac{3}{4}$.

m	$-\infty$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
SGN de Δ'		$-$	0	$+$	

On discute suivant le signe de Δ', c'est-à-dire suivant les valeurs de m en distinguant trois cas.

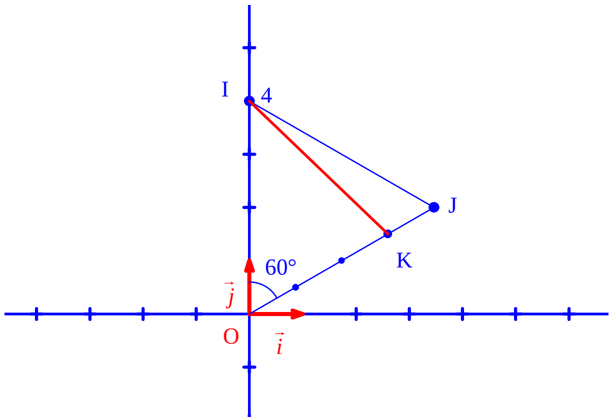
• Si $m > \dfrac{3}{4}$, alors l'équation (E) a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$; par suite, D_m et $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection.

• Si $m = \dfrac{3}{4}$, alors l'équation (E) a une racine double dans $\mathbb{R}$; par suite, D_m et $\mathscr{C}$ ont un unique point d'intersection.

• Si $m < \dfrac{3}{4}$, alors l'équation (E) n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$; par suite, D_m et $\mathscr{C}$ n'ont pas de point d'intersection.

Partie 2

Un graphique est nécessaire pour visualiser la situation.



1°) **Calculons IK.**

Dans le triangle OIK, d'après le théorème de Pythagore généralisé (« formule du côté »), on a :
$\mathrm{IK}^2 = \mathrm{OI}^2 + \mathrm{OK}^2 - 2\mathrm{OI}\times\mathrm{OK}\times\cos\widehat{\mathrm{IOK}}$.

Le triangle OIJ est équilatéral par hypothèse donc tous ses angles ont pour mesure 60°.

De plus, tous ses côtés ont la même longueur. Comme $\mathrm{I}(0\,;4)$, on en déduit sans calcul que $\mathrm{OI}=4$.
Par suite, $\mathrm{OJ}=4$.

Or $\overrightarrow{\mathrm{JK}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{JO}}$ donc $\mathrm{JK}=1$ et $\mathrm{OK}=3$.

Par suite,

$\mathrm{IK}^2 = 4^2 + 3^2 - 2\times4\times3\times\cos 60°$

$= 13$

D'où $\mathrm{IK}=\sqrt{13}$.

Autres méthodes :

- On utilise le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle IJK (même principe).

- On note L le milieu de [OJ].

Comme OIJ est équilatéral, L est le pied de la hauteur issue de I.

De plus, $\mathrm{IL} = \dfrac{4\times\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

D'autre part, $\mathrm{LJ}=2$ et $\mathrm{LK}=1$.
Donc d'après le théorème de Pythagore dans le triangle IKL rectangle en L, on a :
$\mathrm{IK}^2 = \mathrm{IL}^2 + \mathrm{LK}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 13$.

On en déduit que $\mathrm{IK}=\sqrt{13}$.
- On note L le milieu de [OJ].
Comme OIJ est équilatéral, L est le pied de la hauteur issue de I.
On applique la formule de la médiane dans le triangle IJL.

$\mathrm{IJ}^2 + \mathrm{IL}^2 = 2\mathrm{IK}^2 + \dfrac{\mathrm{JL}^2}{2}$

$4^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2\mathrm{IK}^2 + \dfrac{2^2}{2}$

$16+12 = 2\mathrm{IK}^2 + 2$

$2\mathrm{IK}^2 = 26$

$\mathrm{IK}^2 = 13$

2°) **Calculons la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{OKI}}$.**

Dans le triangle OIK, d'après le théorème de Pythagore généralisé, on a :
$\mathrm{OI}^2 = \mathrm{KI}^2 + \mathrm{KO}^2 - 2\mathrm{KI}\times\mathrm{KO}\cos\widehat{\mathrm{OKI}}$.

On a donc : $4^2 = 13 + 3^2 - 2\sqrt{13}\times3\cos\widehat{\mathrm{OKI}}$ d'où $-6\sqrt{13}\cos\widehat{\mathrm{OKI}} = -6$ soit $\cos\widehat{\mathrm{OKI}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

D'après la calculatrice, on a : $\widehat{\mathrm{OKI}} = 73{,}8978862...$.

Donc $\widehat{\mathrm{OKI}} \approx 73{,}9°$ (valeur arrondie au dixième).

Autre méthode : utilisation de la formule des sinus dans le triangle OKI

On a : $\dfrac{\mathrm{OI}}{\sin\widehat{\mathrm{OKI}}} = \dfrac{\mathrm{IK}}{\sin\widehat{\mathrm{IOK}}}$ donc $\dfrac{4}{\sin\widehat{\mathrm{OKI}}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sin 60°}$.

Par suite, $\dfrac{4}{\sin\widehat{\mathrm{OKI}}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ d'où $\sin\widehat{\mathrm{OKI}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

On retrouve le même résultat.

IV.

1°)

a) **Déterminons la loi suivie par X.**

L'épreuve « répondre à une question » est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à un succès de probabilité p soit à un échec de probabilité $1-p$.

On répète cette épreuve 20 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

X est la variable qui compte le nombre de succès à l'issue du questionnaire.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et p (notée $\mathcal{B}(20\,;p)$).

b) **Calculons la probabilité que le candidat ait 12 réponses justes.**

Dans cette question, on prend $p=\frac{2}{3}$ puisque l'on suppose que le candidat a deux chances sur trois de donner la bonne réponse pour chaque question.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(\mathrm{X}=12)\approx 0{,}148$ (valeur arrondie au millième).

Le développement suivant n'était pas exigé sur la copie (puisque la calculatrice donnait directement le résultat).

$P(\mathrm{X}=12)=\binom{20}{12}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{20-12}$ (ne pas oublier les parenthèses autour des fractions élevées à des puissances)

$$=\binom{20}{12}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$

$$=125970\times\frac{4096}{531441}\times\frac{1}{6561}$$

donc $P(\mathrm{X}=12)\approx 0{,}148$ (valeur arrondie au millième)

2°)

a) **Démontrons que $\mathrm{T}=1{,}5\mathrm{X}-10$.**

$\mathrm{T}=\mathrm{X}+(20-\mathrm{X})\times(-0{,}5)=\mathrm{X}-10+0{,}5\mathrm{X}=1{,}5\mathrm{X}-10$

b) **Exprimons l'espérance de X et de T en fonction de *p*.**

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=20p$ (formule du cours donnant l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale)

Pour le calcul de l'espérance de T, on applique la « propriété de linéarité ».

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{T})&=\mathrm{E}(1{,}5\mathrm{X}-10)\\&=1{,}5\mathrm{E}(\mathrm{X})-10\\&=1{,}5\times 20p-10\\&=30p-10\end{aligned}$$

On donne évidemment le résultat de $\mathrm{E}(\mathrm{T})$ sous la forme la plus simple possible.

c) **Déterminons *p* tel que $\mathrm{E(T)}=14$ (1).**

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow 30p-10=14\\&\Leftrightarrow p=\frac{24}{30}\\&\Leftrightarrow p=\frac{4}{5}\\&\Leftrightarrow p=0{,}8\end{aligned}$$

Si le candidat veut espérer obtenir un total de 14 points en moyenne, la valeur de p doit être de 0,8.

3°)

a) **Déterminons le nombre minimal de réponses correctes pour que le candidat ait un total supérieur ou égal à 10.**

On a : $\mathrm{T}=1{,}5\mathrm{X}-10$.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\geqslant 10&\Leftrightarrow 1{,}5\mathrm{X}-10\geqslant 10\\&\Leftrightarrow 1{,}5\mathrm{X}\geqslant 20\\&\Leftrightarrow \mathrm{X}\geqslant\frac{20}{1{,}5}\\&\Leftrightarrow \mathrm{X}\geqslant\frac{40}{3}\end{aligned}$$

D'après la calculatrice, on a : $\frac{40}{3}=13{,}333...$.

On en déduit que le nombre minimal de réponses correctes pour que le candidat ait un total supérieur ou égal à 10 est 14.

b) **Déterminons si les objectifs des concepteurs du QCM ont été atteints.**

Pour répondre à cette question, on s'appuie uniquement sur des calculs de probabilités (on n'utilise pas l'espérance ni la variance).

D'après la question précédente,
- un candidat est accepté si le nombre de bonnes réponses est supérieur ou égal à 14 ;

- un candidat est refusé si le nombre de bonnes réponses est inférieur ou égal à 13.

● On se place dans le cas d'un candidat sérieux.
D'après l'énoncé, la probabilité qu'un candidat sérieux donne une réponse correcte à une question est égale à 0,7.
Pour un candidat travailleur, X suit une loi binomiale de paramètre $n=20$ et $p=0{,}7$.
L'événement « refuser un candidat travailleur » est $(\mathrm{X}\leqslant 13)$.

Grâce à la calculatrice (TI : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ binomFrép (20,0.7,13)), on obtient : $P(\mathrm{X}\leqslant 13)=0{,}391990188\ldots$

On a donc $P(\mathrm{X}\leqslant 13)>0{,}25$.
Par conséquent, l'objectif « la probabilité de refuser un candidat travailleur est strictement inférieure à 0,25 » n'est pas atteint.

● On se place dans le cas d'un candidat peu travailleur.
D'après l'énoncé, on sait qu'un candidat peu travailleur répond au hasard à toutes les questions.

Pour un candidat peu travailleur, X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p'=\frac{1}{4}=0{,}25$.

L'événement « accepter un candidat peu travailleur » est $(\mathrm{X}\leqslant 14)$.

Pour pouvoir utiliser la calculatrice, on écrit $P(\mathrm{X}\geqslant 14)=1-P(\mathrm{X}\leqslant 13)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(\mathrm{X}\geqslant 14)=0{,}000029511746\ldots$.

On a donc $P(\mathrm{X}\geqslant 14)<0{,}01$.

Par conséquent, l'objectif « la probabilité d'accepter un candidat peu travailleur est strictement inférieure à 0,01 » est atteint.

V.

Cet exercice portait sur les formules d'addition et de duplication du cosinus et du sinus qu'il était nécessaire de bien connaître.

Partie 1

$x=\cos\frac{\pi}{5}$; $y=\sin\frac{\pi}{5}$

1°) **Exprimons $\cos\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et $\sin\frac{2\pi}{5}$ en fonction de x et de y.**

On applique les formules de duplication du cosinus et du sinus.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{5}&=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\\&=2x^2-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{2\pi}{5}&=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\&=2xy\end{aligned}$$

2°) **Exprimons $\sin\frac{3\pi}{5}$ en fonction de x et y.**

$$\begin{aligned}\sin\frac{3\pi}{5}&=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\&=y\left(2x^2-1\right)+2xy\times x\\&=y\left(2x^2-1\right)+2x^2y\\&=y\left(2x^2-1+2x^2\right)\\&=y\left(4x^2-1\right)\end{aligned}$$

3°) **Justifions que : $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$.**

On a : $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$

On utilise la propriété $\sin\left(\pi-x\right)=\sin x$ (valable pour tout réel x).

4°) **Démontrons que : $4x^2-2x-1=0$.**

D'après la question précédente, $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$.

Par conséquent, $y\left(4x^2-1\right)=2xy$.

Or $y\neq 0$ (justification essentielle à donner pour pouvoir simplifier) d'où $4x^2-1=2x$.

Donc $4x^2-2x-1=0$ (1).

5°) **Calculons $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.**

On résout l'équation (1).

Le discriminant réduit de l'équation est égal à $\Delta'=5$.

Mieux vaut utiliser le discriminant réduit que le discriminant « normal » : les expressions des solutions sont toutes simplifiées.

$\Delta'>0$

L'équation a pour racines $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

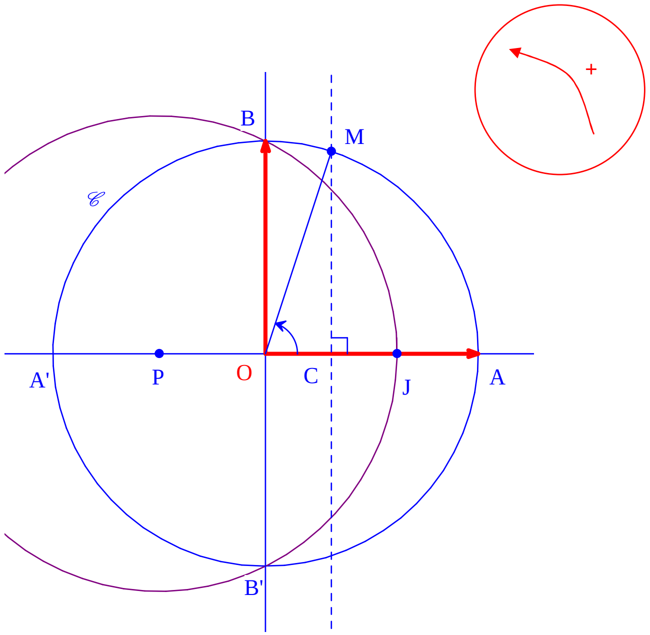
Or $\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ et $\cos\frac{\pi}{5}>0$ (car $\frac{\pi}{5}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{5}&=2x^2-1\\&=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1\\&=2\times\frac{1+5+2\sqrt{5}}{16}-1\\&=\frac{6+4\sqrt{5}}{8}-1\\&=\frac{3+2\sqrt{5}}{4}-1\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{aligned}$$

Partie 2

Faire une figure pour visualiser la situation.



1°) **Calculons OC.**

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OPB rectangle en O, on a :

$$\begin{aligned}PB^2 &= PO^2 + OB^2\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Donc $PB = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

[PJ] et [PB] sont deux rayons d'un même cercle.

Par suite, $PB = PJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

De plus $O \in [PJ]$ donc

$$\begin{aligned}OJ &= PJ - PO\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}$$

C est le milieu de [OJ].

Par suite, $OC = \dfrac{OJ}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Une candidat (Marie Gouraud) a eu l'idée d'utiliser une équation du cercle de centre P passant par B : $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}$.
On obtenait ensuite l'abscisse du point C.

2°) M : point d'intersection de la médiatrice de [OJ] et de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Déterminons la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$.

D'après la question 1°) : $OC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$C \in [OA]$ donc $x_C \geqslant 0$ d'où $x_C = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Or d'après la question 5°) de la partie 1, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Donc $x_C = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Notons α la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$.

Comme M appartient au cercle trigonométrique, $x_M = \cos\alpha$.

Or C est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses donc $x_M = x_C$.

D'où $\cos\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Comme α appartient à l'intervalle $[0 ; \pi]$ (par définition de la mesure principale d'un angle orienté et parce que M est situé sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par hypothèse).

Donc $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$.

On en déduit que la mesure principale en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$ est $\dfrac{2\pi}{5}$.

3°) **Bonus :**

Expliquons comment construire à la règle et au compas un pentagone régulier convexe inscrit dans $\mathscr{C}$ dont un sommet est A.

D'après la question précédente, $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$ d'où $\widehat{AOM}=\dfrac{2\pi}{5}$.

Or tous les angles géométriques au centre d'un pentagone régulier convexe mesurent $\dfrac{2\pi}{5}$ radians.

On en déduit que AM est la longueur du côté d'un pentagone régulier convexe inscrit dans $\mathscr{C}$.
Ainsi, on effectue la construction du point M à la règle et au compas.
Puis on trace le segment [AM].
Avec le compas, on prend la longueur AM et l'on reporte 5 fois cette longueur sur le cercle de manière à obtenir les sommets d'un pentagone régulier convexe.