Suites de matrices unicolonnes vérifiant une relation de récurrence de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$

Plan du chapitre :

I. Notations

A : matrice carrée d'ordre m
B : matrice unicolonne à m lignes
X_0 : matrice unicolonne à m lignes

On étudie une suite (X_n) de matrices unicolonnes à m lignes définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n + B$.

Le 17 février 2021

Je propose de regarder les cas particuliers suivants :

Cas particulier N°1 : $A =$ matrice nulle
Cas particulier N°2 : $A = I_n$
Cas particulier N°3 : $A = -I_n$

Autre idée en exercice :

Déterminer X_0 tel que la suite (X_n) soit constante.

II. Expression de X_n en fonction de n

1°) Calcul des premiers termes

$X_1 = AX_0 + B$

$$\begin{aligned} X_2 &= A(AX_0 + B) + B \\ &= AAX_0 + AB + B \\ &= A^2X_0 + AB + B \end{aligned}$$

$X_3 = A^3X_0 + A^2B + AB + B$

Il est assez facile de conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^nX_0 + A^{n-1}B + ... + AB + B$.
En factorisant, on peut même écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^nX_0 + (A^{n-1} + ... + A + I_n)B$.
Cette dernière expression est cependant relativement peu exploitable car la somme $A^{n-1} + ... + A + I_n$ ne peut se réduire aisément.

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous placer dans un cas particulier qui permet de reprendre la même idée que pour les suites arithmético-géométriques réelles ou complexes.

2°) Un cas particulier

Dans tout ce paragraphe, on suppose qu'il existe une matrice L unicolonne à m lignes telle que $L = AL + B$.

On pose $U_n = X_n - L$.

$$X_{n+1} = AX_n + B$$
$$L = AL + B$$

Par soustraction membre à membre, on a :

$$X_{n+1} - L = A(X_n - L)$$

soit $U_{n+1} = AU_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n (X_0 - L) + L$.

III. Exemple

On prend $m = 2$ (autrement dit, on travaille avec des matrices ayant 2 lignes).

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices unicolonnes à 2 lignes définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n + B$.

1°) Déterminer une matrice unicolonne L à 2 lignes telle que $L = AL + B$.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

3°) En déduire l'expression de X_n en fonction de *n*.

Résolution :

1°) Déterminons une matrice unicolonne L à 2 lignes telle que $L = AL + B \quad (1)$.

1ère méthode :

$(1) \Leftrightarrow L - AL = B$

$\Leftrightarrow (I_2 - A)L = B$ (attention au sens pour la factorisation)

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(I_2 - A) = -1 \times (-2) - 0 \times (-1) = 2$

$\det(I_2 - A) \neq 0$ donc la matrice $I_2 - A$ est inversible et $(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc

$(1) \Leftrightarrow L = (I_2 - A)^{-1} B$

$\Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow L = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow L = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

2e méthode :

On pose $L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

Attention, il n'y a pas de condition du type $a + b = 1$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a + b + 10 \\ b = 3b + 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = -6 + 10 \\ b = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -6 \end{cases}$

$$L = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2°) Démontrons que pour tout entier naturel *n* on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

On procède par récurrence.

Pour *n* entier naturel quelconque, on définit la phrase $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ ».

La phrase $P(0)$ est vraie car $\mathrm{A}^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^0 & 3^0-2^0\\ 0 & 3^0\end{pmatrix}$.

On considère un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\mathrm{A}^k=\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{k+1}&=\mathrm{A}^k\times\mathrm{A}\\ &=\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 3^{k+1}-3\times2^k+2^k\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 3^{k+1}-2^k(3-1)\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 3^{k+1}-2^{k+1}\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$ est vraie.

On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

3°) Déduisons-en l'expression de X_n en fonction de *n*.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_n&=\mathrm{A}^n(\mathrm{X}_0-\mathrm{L})+\mathrm{L}\\ &=\mathrm{A}^n\begin{pmatrix}5\\ 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ -6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\ -6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}5\times2^k+4\left(3^k-2^k\right)-4\\ 4\times3^k-6\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^k+4\times3^k-4\\ 4\times3^k-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

IV. Obtention des premiers termes

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}10\\ 12\end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices unicolonnes à 2 lignes définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{AX}_n+\mathrm{B}$.

On peut calculer les premiers termes « à la main » à l'aide de la relation de récurrence.

Cependant, si l'on souhaite gagner du temps, on peut aussi utiliser la fonction « Rép » de la calculatrice, comme pour une suite numérique réelle.

On commence par rentrer les matrices A, B et X_0 (A aura pour nom [A], B aura pour nom [B] et X_0 aura pour nom [C]).

On effectue ensuite les calculs.

X_0 correspond à la matrice [C].

On sait que X_1 est donnée par $\mathrm{X}_1=\mathrm{AX}_0+\mathrm{B}$. On tape $[\mathrm{A}]*[\mathrm{C}]+[\mathrm{B}]$.

On sait que X_2 est donnée par $\mathrm{X}_2=\mathrm{AX}_1+\mathrm{B}$.
On effectue donc le calcul de la manière suivante $[\mathrm{A}]*\text{Rép}+[\mathrm{B}]$ (on utilise la touche « Rép » / « Ans » pour introduire X_1).

On sait que X_3 est donnée par $\mathrm{X}_3=\mathrm{AX}_2+\mathrm{B}$.
On effectue donc le calcul de la manière suivante $[\mathrm{A}]*\text{Rép}+[\mathrm{B}]$ (on utilise la touche « Rép » / « Ans » pour introduire X_2).

On obtient les termes de la suite un par un.

V. Algorithmique et programmation

Exemple :

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices à 2 lignes et 1 colonne définie par son premier terme $\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{AX}_n+\mathrm{B}$.

On veut rédiger un **algorithme** qui permet de calculer et d'afficher un terme d'indice $n\geqslant1$.

Variables :
n et i, des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1
A, B et X, des matrices

Entrée :
Saisir n

Initialisations :
A prend la valeur $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

B prend la valeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

X prend la valeur $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  X prend la valeur $\text{A} \times \text{X} + \text{B}$
FinPour

Sortie :
Afficher X

Dans cet algorithme, on a déclaré les variables (matrices et nombres) au début.

Programme sur calculatrice TI :

```
: Prompt N
: [[4,4] [2,1]] → [A]
: [[1][2]] → [B]
: [[5][3]] → [C]
: For (I,1,N)
: [A] ∗ [C] + [B] → [C]
: End
: Disp [C]
```

Quelques observations :

• La lettre X n'existe pas pour désigner une matrice sur la calculatrice donc on utilise la lettre C.

• On observera la méthode pour rentrer des matrices à l'intérieur d'un programme sur calculatrice : on utilise des crochets, on rentre les lignes les unes après les autres.

Pour les crochets :

• Ceux qui sont à « gauche » (qui servent à rentrer les coefficients numériques des matrices A, B, C :

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\times}$ $\rightarrow$ [

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{-}$ $\rightarrow$]

• Ceux qui entourent les noms des matrices A, B, C :

Aller chercher dans les matrices.

• On peut rentrer préalablement les matrices [A] et [B] (qui ne sont pas modifiées dans le programme) ainsi que [C].

En faisant tourner le programme pour des valeurs de N assez grandes, on peut aisément conjecturer l'existence d'un état stable (c'est-à-dire que l'on peut aisément conjecturer la convergence de la suite (X_n) vers une matrice colonne).

VI. Rappel : utilisation de la calculatrice pour des suites imbriquées

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par ses premiers termes $u_0 = -2$ et $v_0 = 3$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n$.
On rentre la suite (u_n) : $n\text{Min} = 0$, $\text{u}(n) = \text{u}(n-1) + \text{v}(n-1)$, $\text{u}(n\text{Min}) = -2$.
On rentre la suite (v_n) : $\text{v}(n) = \text{u}(n-1) - \text{v}(n-1)$, $\text{v}(n\text{Min}) = 3$.

n	$u(n)$	$v(n)$
0	– 2	3
1	1	– 5
2	– 4	6
3	2	10

VII. Utilisation dans des problèmes

On est souvent amené à modéliser des situations concrètes par l'étude de suites couplées, par exemple dans l'étude de dynamique de populations.

Dans le cas linéaire, il est possible de ramener l'étude de plusieurs suites imbriquées à l'étude d'une seule suite récurrente de matrices.

On étudie fréquemment le comportement asymptotique de telles suites (voir exercices).