**TS1**

# Contrôle du jeudi 18 avril 2013 (45 minutes)

**Prénom :** ……………………………………..……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

---

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

---

## I. (1 point)

On considère les vecteurs $\vec{u}\,(-1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ et $\vec{v}\,(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.
Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$ (écrire une seule étape de calcul avant le résultat).

$\vec{u} \bullet \vec{v} =$ ........................................................ = ..........

---

## II. (4 points)

1°) Soit $P_1$ et $P_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y+z+1=0$ et $-x+2y-4z=0$.
Donner un vecteur normal à chacun des plans et démontrer que $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{u_1}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur normal à $P_1$.

$\overrightarrow{u_2}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur normal à $P_2$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) Soit $P_1$ et $P_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives $4x-2y+6z-1=0$ et $6x-3y+9z-2=0$.
Donner un vecteur normal à chacun des plans et démontrer que $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.

$\overrightarrow{u_1}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur normal à $P_1$.

$\overrightarrow{u_2}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur normal à $P_2$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

## III. (7 points)

Soit $P$ le plan d'équation cartésienne $4x+3y-2z+3=0$.

On donne les droites $D$ et $D'$ définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D\ \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = -1+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D'\ \begin{cases} x = t \\ y = 3+t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1°) Compléter sans justifier :

$\vec{u}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur normal à $P$.

$\vec{v}$ (….. ; ….. ; …..) est un vecteur directeur de $D$.

$\vec{v}\,'$(….. ; ….. ; …..) est un vecteur directeur de $D'$.

2°) Démontrer que $D$ est parallèle à $P$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

3°) a) Démontrer que $D'$ et $P$ sont sécants.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de $D'$ et $P$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

---

**IV. (8 points)**

On donne les points A(1 ; 3 ; – 1) et B(0 ; 1 ; 2).

1°) Déterminer sans expliquer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer en rédigeant une équation cartésienne du plan $P$ passant par A et orthogonal à (AB).

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

3°) Donner sans expliquer une équation du plan $Q$ passant par A et parallèle au plan ($x$O$y$).

…………………………………………………………………………………………………………

4°) On note $\Delta$ la droite d'intersection des plans $P$ et $Q$.
Déterminer les coordonnées du point C de $\Delta$ d'ordonnée nulle.

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

---

**Bonus à traiter sur une feuille à part s'il reste du temps :**

Démontrer que les droites $D$ et $D'$ définies dans l'exercice **III** ne sont pas coplanaires.

# Corrigé du contrôle du 18-4-2013

## I.

$\vec{u}(-1\,;2\,;-3)$ $\qquad$ $\vec{v}(-2\,;2\,;2)$

Calculons $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\times(-2)+2\times2-3\times2=0$

---

## II.

1°) $P_1\ :\ 2x+3y+z+1=0$ $\qquad$ $P_2\ :\ -x+2y-4z=0$

**Donnons un vecteur normal à chacun des plans et démontrons que $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires.**

$\overrightarrow{u_1}(2\,;3\,;1)$ est un vecteur normal à $P_1$.

$\overrightarrow{u_2}(-1\,;2\,;-4)$ est un vecteur normal à $P_2$.

$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=2\times(-1)+3\times2+1\times(-4)=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux.
On en déduit que les plans $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires.

2°) $P_1$ : $4x-2y+6z-1=0$ $\qquad$ $P_2$ : $6x-3y+9z-2=0$

**Donnons un vecteur normal à chacun des plans et démontrons que $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.**

$\overrightarrow{u_1}(4\,;-2\,;6)$ est un vecteur normal à $P_1$.

$\overrightarrow{u_2}(6\,;-3\,;9)$ est un vecteur normal à $P_2$.

On constate que $\overrightarrow{u_2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{u_1}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.
On en déduit que les plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.

## III.

$P\ :\ 4x+3y-2z+3=0$

$$D\ \begin{cases}x=1-t\\ y=2+2t\\ z=-1+t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R}) \qquad\qquad D'\ \begin{cases}x=t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

1°) **Complétons sans justifier :**

$\vec{u}(4\,;3\,;-2)$ est un vecteur normal à $P$.

$\vec{v}(-1\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de $D$.

$\vec{v}\,'(1\,;1\,;2)$ est un vecteur directeur de $D'$.

2°) **Démontrons que $D$ est parallèle à $P$.**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=4\times(-1)+3\times2-2\times1=0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
On en déduit que $D$ est parallèle à $P$.

3°) a) **Démontrons que $D'$ et $P$ sont sécants.**

$\vec{u}\cdot\vec{v}\,'=4\times1+3\times1-2\times2=3$

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}\,'\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}\,'$ ne sont pas orthogonaux.

On en déduit que $D'$ et $P$ ne sont pas parallèles ; par suite, $D'$ et $P$ sont sécants en un point.

b) **Calculons les coordonnées du point d'intersection I de $D'$ et $P$.**

I est le point d'intersection de $D'$ et $P$ donc son paramètre $t$ vérifie l'équation
$4t+3(3+t)-2(3+2t)+3=0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 3t+6=0$

$\Leftrightarrow t=-2$

On en déduit que $\begin{cases}x_I=-2\\ y_I=3-2=1\\ z_I=3+2\times(-2)=-1\end{cases}$.

Donc I$(-2\,;1\,;-1)$.

**IV.**

A(1 ; 3 ; – 1) B(0 ; 1 ; 2)

1°) **Déterminons sans expliquer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).**

Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) s'écrit $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

On peut prendre également le point B.

2°) **Déterminons une équation cartésienne du plan *P* passant par A et orthogonal à (AB).**

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0 \\ &\Leftrightarrow -1(x-1) - 2(y-3) + 3(z+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 2y + 3z + 10 = 0 \end{aligned}$$

Donc *P* a pour équation cartésienne $-x - 2y + 3z + 10 = 0$.

3°) **Donnons une équation du plan *Q* passant par A et parallèle au plan (*xOy*).**

*Q* a pour équation $z = -1$.

4°) $P \cap Q = \Delta$

**Déterminons les coordonnées du point C de Δ d'ordonnée nulle.**

On sait que $\Delta = P \cap Q$ donc tout point de Δ appartient à la fois à *P* et à *Q* (tous les points de Δ appartiennent forcément à la fois à *P* et à *Q*).

L'ordonnée de C est nulle $y_{\mathrm{C}} = 0$.

De plus, C appartient à *Q* donc $z_{\mathrm{C}} = -1$.

Enfin, $\mathrm{C} \in P$ donc $-x_{\mathrm{C}} - 2 \times 0 + 3 \times (-1) + 10 = 0$.

On en déduit que $x_{\mathrm{C}} = 7$.

On en déduit que C a pour coordonnées (7 ; 0 ; – 1).

On pourrait aussi déterminer un système d'équations paramétriques de *D* (voie plus longue cependant, qu'il vaut mieux éviter).

$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

# Bonus :

Démontrons que les droites *D* et *D'* définies dans l'exercice **III** ne sont pas coplanaires.

$$D \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D' \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\vec{v'} = \lambda \vec{v}$.

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas colinéaires ; par suite, les droites *D* et *D'* ne sont pas parallèles.

Pour déterminer si les droites *D* et *D'* sont sécantes, cherchons si le système $\begin{cases} 1 - t = t' & (1) \\ 2 + 2t = 3 + t' & (2) \\ -1 + t = 3 + 2t' & (3) \end{cases}$ admet des solutions.

Considérons le sous-système formé par les équations (1) et (2).

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 - t \\ 2 + 2t = 3 + t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 - t \\ 2t = 1 + 1 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{1}{3} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On regarde si l'équation (3) est vérifiée pour ces valeurs de *t* et *t'* :

D'une part, on a : $-1 + t = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

D'autre part, on a : $3 + 2t' = 3 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$.

D'où $-1 + t \neq 3 + 2t'$.

Donc l'équation (3) n'est pas vérifiée.

Le système n'admet donc pas de solution.

Les droites *D* et *D'* n'ont donc pas de point d'intersection.

Les droites *D* et *D'* ne sont ni parallèles ni sécantes. On en déduit qu'elles sont non coplanaires.

On peut rentrer le système des trois équations directement dans la calculatrice.