TS spé

Processus d'évolution
Graphes pondérés

Plan du chapitre :

Mots-clefs du chapitre :
graphe, arête, sommet, orientation, flèche, marche aléatoire, état, pondération, probabilités de transition, proportion, matrice de transition en lignes ou en colonnes, distribution initiale, état stable ou stationnaire (distribution invariante)

Objectifs :

- Mettre en place des éléments de vocabulaire relatif aux graphes pondérés ;
- Montrer comment on peut ramener l'étude de processus d'évolution à l'étude de marches aléatoires sur un graphe pondérés
- Donner des éléments pour étudier des marches aléatoires à l'aide de suites de matrices.

Introduction :

Le chapitre a de nombreuses applications concrètes.

- Exemple 1 : modèle de propagation d'épidémie

La maladie va-t-elle continuer à se développer ?
Où en serons-nous dans trois mois ?
Quelle proportion de la population va tomber malade ?
À quelle vitesse ? Le nombre de personnes infectés atteint-il un maximum au cours du temps, si oui quand ?
Comment limiter voire empêcher la propagation de la maladie ?

- Exemple 2 : marche aléatoire
Une puce saute d'un sommet à un autre d'un triangle de sommets A, B, C. Les sauts de la puce se font avec certaines probabilités précisées dans chaque énoncé. Il s'agit d'une marche aléatoire.

Peut-on prévoir la position de la puce après un certain nombre de sauts ?

I. Un premier modèle d'épidémie

1°) Situation

On considère une maladie contagieuse.
On constate que chaque mois, dans la population d'une ville, une personne saine peut tomber malade avec une probabilité de 0,03 et une personne malade peut guérir avec une probabilité de 0,05.
On suppose que, initialement, la population n'est pas touchée par la maladie et on s'intéresse à un individu quelconque choisi au départ.

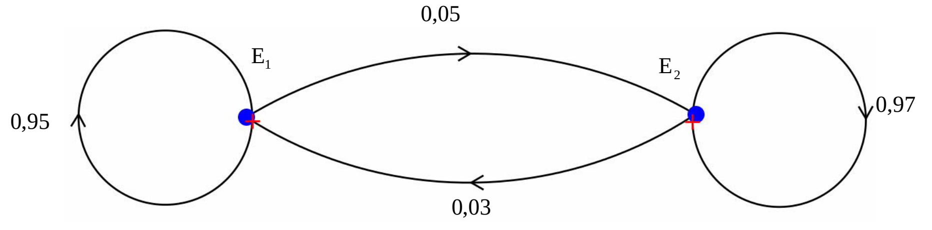
Quelques exemples de questions :

La maladie va-t-elle continuer à se développer ?
Où en serons-nous dans trois mois ?
Quelle proportion de la population va tomber malade ?
À quelle vitesse ? Le nombre de personnes infectés atteint-il un maximum au cours du temps, si oui quand ?
Comment limiter voire empêcher la propagation de la maladie ?

Pour débuter l'étude, on pourrait effectuer une simulation informatique. Celle-ci est proposée dans le dernier paragraphe du cours.

2°) Représentation à l'aide d'un graphe probabiliste (ou pondéré)

On considère les *états* E_1 : « L'individu est atteint » et E_2 : « L'individu est sain ».



E_1 et E_2 sont appelés les **sommets** du graphe.
Ces sommets sont reliés par des **arêtes orientées** (on parle de « graphe orienté » ou de « graphe fléché »).

On observera la présence de **boucles** au niveau des sommets.

Il s'agit d'un graphe pondéré. Les arêtes portent des pondérations égales aux probabilités conditionnelles précisées dans l'énoncé. Il s'agit des probabilités de transition d'un état à l'autre. Elles sont constantes au cours du temps.

On peut assimiler le processus évolutif à une *marche aléatoire* sur le graphe à deux sommets représenté précédemment.

À chaque étape, les probabilités sont les mêmes.

Le comportement de l'individu est appelé une *marche aléatoire* (on peut faire l'analogie avec un piéton qui marcherait sur une ligne droite en allant, aléatoirement, soit à gauche, soit à droite).

Cette marche aléatoire comporte deux *états* E_1 et E_2.

2°) État d'un mois au suivant

$$\begin{cases} a' = 0,95a + 0,03b \\ b' = 0,05a + 0,97b \end{cases}$$

3°) Utilisation de suites

Pour tout entier naturel *n*, on note :

a_n : probabilité que l'individu soit atteint au bout de *n* mois
b_n : probabilité que l'individu soit sain au bout de *n* mois

On a : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

D'après la formule des probabilités totales, pour tout entier naturel *n*, on a les relations (*S*)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,97b_n \end{cases}.$$

Il s'agit de relations de récurrences linéaires (relations linéaires) qui vont pouvoir être traduites en matrices.

4°) Utilisation de matrices

• **Matrices colonnes :**

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \underbrace{\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}} \end{array}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dans la matrice, on passe des colonnes aux lignes.

• **Matrices lignes :**

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \underbrace{\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}} \end{array}}_{B}$$

Dans la matrice, on passe des lignes aux colonnes.

Vocabulaire :

A et B sont appelées **matrices de transition** du graphe.
A et B sont des matrices carrées d'ordre 2.

Elles vérifient les propriétés suivantes :

• A et B sont transposées l'une de l'autre.

• Les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque colonne de A est égale à 1. On dit que A est **stochastique en colonnes**.

• Les coefficients de B sont des réels positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque ligne de B est égale à 1. On dit que B est **stochastique en lignes**.

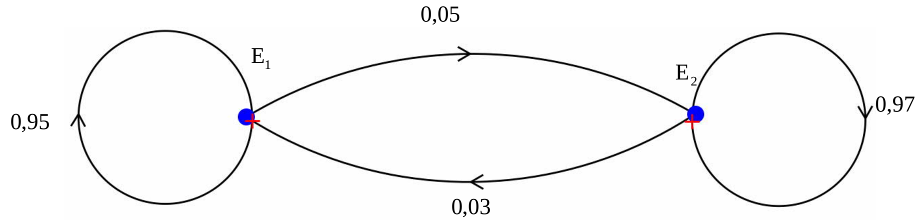
On retiendra que :

- pour la matrice A (étude avec des matrices colonnes), on commence par les colonnes pour passer aux lignes ;

- pour la matrice B (étude avec des matrices lignes), on passe des lignes aux colonnes.

5°) Écriture définitive

On oublie l'aspect suite sous-jacent.



• **colonnes :**

Matrice de transition en colonnes : $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$.

On note X_n la matrice colonne représentant l'« état probabiliste » au bout de *n* mois.
On dit aussi qu'il s'agit de la distribution de probabilités au bout de *n* mois.

On prendra garde de ne pas confondre cette notation avec celle employée pour désigner la probabilité *P*.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = A\,X_n$.

L'état initial ou distribution initiale est la matrice $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après une propriété du cours sur les puissances de matrices, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

On peut ainsi connaître l'état probabiliste au bout d'1 mois, 2 mois, 3 mois...

L'état probabiliste ou distribution de probabilités au bout d'un mois est
$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,97 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0,904 & 0,0576 \\ 0,096 & 0,9424 \end{pmatrix}$ donc l'état probabiliste au bout de deux mois est $X_2 = A^2X_0 = \begin{pmatrix} 0,0576 \\ 0,9424 \end{pmatrix}$.

$A^3 = \begin{pmatrix} 0,86168 & 0,082892 \\ 0,13832 & 0,917008 \end{pmatrix}$ donc l'état probabiliste au bout de trois mois est $X_3 = A^3X_0 = \begin{pmatrix} 0,082992 \\ 0,917008 \end{pmatrix}$.

• **lignes :**

Matrice de transition en lignes : $B = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$

On note Y_n la matrice ligne représentant l'« état probabiliste » ou distribution de probabilités au bout de *n* mois.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = Y_n B$.

L'état initial ou distribution initiale est la matrice $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'après une propriété du cours sur les puissances de matrices, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = Y_0 B^n$.

La situation décrit un processus aléatoire dont l'étude s'inscrit dans un cadre plus général des « chaînes de Markov ».
Markov est un mathématicien russe qui a entamé, en 1907, l'étude de phénomènes aléatoires où le résultat d'une expérience peut influencer l'expérience suivante.

Rappel :

On avait démontré dans le chapitre sur les puissances de matrices la propriété suivante, *a* et *b* étant deux réels de somme non nulle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer ce résultat à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$ en prenant $a = 0,05$ et $b = 0,03$.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3+5\times 0,92^n & 3-3\times 0,92^n \\ 5-5\times 0,92^n & 5+3\times 0,92^n \end{pmatrix}$.

On aurait pu aussi trouver ce résultat grâce à un logiciel de calcul formel (ou au site dcode).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3-3\times 0,92^n \\ 5+3\times 0,92^n \end{pmatrix}$ (distribution de probabilité au bout de *n* mois).

Comme $-1 < 0,92 < 1$, $0,92^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ (distribution de probabilité limite).

On peut démontrer facilement par le calcul que cet état limite ne dépend pas de l'état probabiliste initial (par exemple, si l'on donne les proportions de personnes malades et saines dans la population de départ).

En posant $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$, on vérifie sans peine que $AS = S$.

On dit que S est un état probabiliste stable ou une distribution de probabilité invariante.

II. Un deuxième modèle de propagation d'épidémie : le modèle SIR

Il s'agit d'un modèle célèbre de propagation d'épidémie.
Ce modèle existe en version continue (avec des fonctions) ou en version discrète. C'est le modèle discret que nous allons présenter ici.

1°) Situation

Dans une population, un individu est susceptible de contracter une certaine maladie.

Il peut être dans un des trois états :
• susceptible d'être touché par la maladie (S) ;
• infecté c'est-à-dire qu'il a la maladie (I) ;
• retiré c'est-à-dire qu'il est immunisé (R).

Ces états sont temporaires, l'individu peut changer d'état.

Supposons que son état puisse changer tous les mois selon les probabilités précisées ci-dessous.

• S'il est immunisé (état R), il peut le rester avec une probabilité de 0,9, ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1.

• S'il est dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,6, ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,3, ou encore à l'état R avec une probabilité de 0,1 (par vaccination naturelle, par exemple).

• S'il est dans l'état I, il peut le rester avec une probabilité de 0,05 ou passer à l'état R avec une probabilité de 0,95.

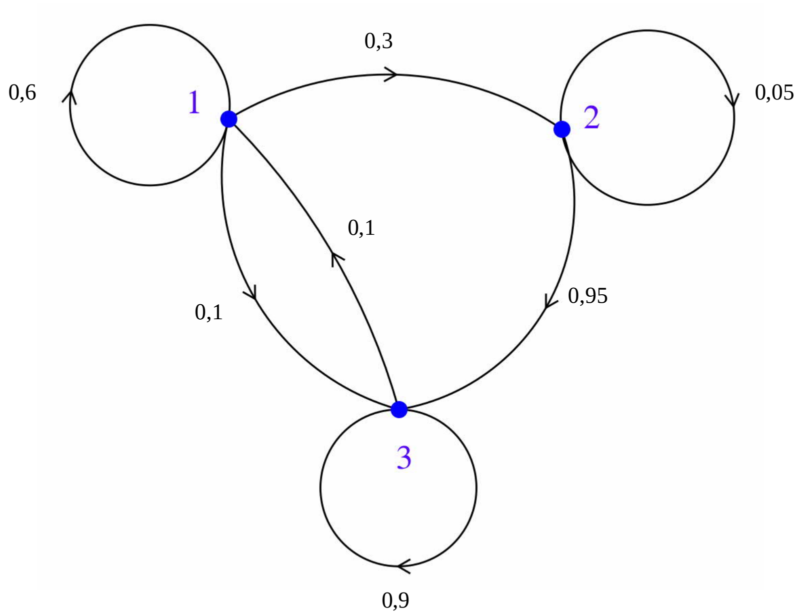
On souhaite répondre à des questions similaires à celles du paragraphe **I**.

Pour débuter l'étude, on pourrait effectuer une simulation informatique. Celle-ci est proposée dans le dernier paragraphe du cours.

2°) Représentation à l'aide d'un graphe probabiliste et matrice de transition

On note les états 1, 2, 3 avec :
État 1 : « L'individu est susceptible d'être touché par la maladie » ;
État 2 : « L'individu est infecté » ;
État 3 : « L'individu est immunisé ».

On complète avec les probabilités de transition d'un état à l'autre.
Ce sont des probabilités conditionnelles.
Leurs valeurs sont constantes, indépendantes du mois.



La matrice de transition en colonnes du graphe est $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0 & 0,1\\ 0,3 & 0,05 & 0\\ 0,1 & 0,95 & 0,9\end{pmatrix}$.

3°) Étude asymptotique

À l'aide de la calculatrice, on calcule des puissances de A d'exposant de plus en plus grand (par exemple, A^{10}, A^{20}, A^{50}, A^{100}.

On remarque que les lignes « s'égalisent ».

Par exemple, pour A^{10}, on obtient $\begin{pmatrix}0,1881188119 & 0,1881188119 & 0,1881188119\\ 0,0594059406 & 0,0594059406 & 0,0594059406\\ 0,7524752475 & 0,7524752475 & 0,7524752475\end{pmatrix}$.

Il semble que la suite (A^n) converge une matrice du type $L=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \beta & \beta & \beta\\ \gamma & \gamma & \gamma\end{pmatrix}$ où α, β, γ sont des réels positifs ou nuls tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$. Cette convergence sera justifiée par un théorème admis.

4°) État stable

On va déterminer l'état stable S.

On pose $S=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ vecteur colonne stochastique c'est-à-dire que :
x, y, z sont des réels positifs ou nuls ;
$x+y+z=1$.

On cherche x, y, z tels que $AS=S \quad (1)$.

$$AS=\begin{pmatrix}0,6 & 0 & 0,1\\ 0,3 & 0,05 & 0\\ 0,1 & 0,95 & 0,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6x+0,1z\\ 0,3x+0,05y\\ 0,1x+0,95y+0,9z\end{pmatrix}$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}0,6x+0,1z=x\\ 0,3x+0,05y=y\\ 0,1x+0,95y+0,9z=z\end{cases}$$

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}0,6x+0,1z=x\\ 0,3x+0,05y=y\\ 0,1x+0,95y+0,9z=z\\ x+y+z=1\end{cases}$ avec la condition $(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathbb{R}_+)^3$.

On peut le faire à la main (un peu long et pas très agréable), à la calculatrice ou de tout autre outil de résolution.

On trouve $x=\dfrac{19}{101}$, $y=\dfrac{6}{101}$, $z=\dfrac{76}{101}$.

Ainsi, $S=\begin{pmatrix}\dfrac{19}{101}\\ \dfrac{6}{101}\\ \dfrac{76}{101}\end{pmatrix}$.

On observe par calcul que les valeurs de x, y, z sont très proches de celles obtenues pour des puissances de A d'exposant de plus en plus grands.

On peut démontrer que :

- ces nombres correspondent aux coefficients α, β, γ de la matrice limite ;
- quelle que soit la distribution de probabilités initiale, on obtient la distribution limite S.

III. Vocabulaire et notions générales

1°) Probabilités de transition

Définition :

On appelle probabilité de transition d'un état à un autre la probabilité de passer de cet état au suivant en une seule étape.

Il s'agit de probabilités conditionnelles dont les valeurs sont constantes.

2°) Matrice de transition

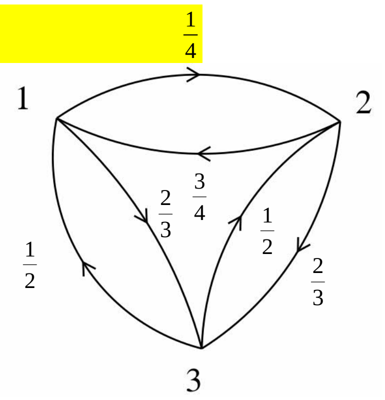
Lorsque l'on étudie l'évolution conjointe de plusieurs données reliées entre elles par des relations linéaires, on peut déterminer le passage d'un état des données à un autre en utilisant le produit matriciel. Si les états possibles sont numérotés de 1 à *p*, on peut les représenter par une matrice colonne à *n* lignes.

Définition :

On appelle matrice de transition en colonnes des états la matrice carrée A d'ordre *p* dont le coefficient de la ligne *i* et de la colonne *j* donne à chaque instant le nombre, la proportion ou la probabilité des transitions possibles de l'état numéroté *j* à l'état numéroté *i*.

Par définition du produit matriciel, à chaque instant les données observées passent des états représentés par la colonne X aux états observés représentés par la colonne X' de tel que $X' = AX$.

3°) Exemple de marche aléatoire sur un graphe à 3 sommets



La matrice de transition (en colonnes) de ce graphe probabiliste est :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coefficient situé sur la ligne *i* et dans la colonne *j* est égal à la probabilité d'arriver en *i* sachant que l'on est parti de *j* (il s'agit d'une probabilité conditionnelle).

4°) Suite de matrices associée

On note X_n la matrice colonne donnant l'état de la marche aléatoire après *n* pas.

On dit que X_n est la matrice colonne qui représente l'état probabiliste de la marche aléatoire après *n* pas.
On dit que X_n est la distribution de probabilités après *n* pas.

On a la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$ (relation qui lie 2 états successifs).

Définition [distribution initiale] :

L'état probabiliste initial ou distribution initiale est la matrice X_0.

On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

5°) Adaptation pour les matrices lignes

• On note B la matrice de transition en lignes.

Le coefficient situé sur la ligne *i* et dans la colonne *j* est égal à la probabilité d'arriver en *j* sachant que l'on est parti de *i*.

B est la transposée de la matrice A.

• Par définition du produit matriciel, à chaque étape, les données observées passent des états représentés par la colonne Y aux états observés représentés par la colonne Y' de tel que $Y' = YB$.

• On note Y_n la matrice ligne donnant l'état de la marche aléatoire après *n* pas.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = Y_n B$ (relation qui lie 2 états successifs).
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = Y_0 B^n$.

6°) Remarque sur les graphes probabilistes

Sur un graphe probabiliste, on évite de tracer les arêtes qui ont un coefficient de pondération de 0.

7°) Rappels sur les puissances de matrices

Certains logiciels de calcul formel permettant d'obtenir l'expression de A^n en fonction de *n* (par exemple, le logiciel « dcode »).

8°) Utilisation

Les chaînes de Markov interviennent dans la modélisation de processus discrets comme nous l'avons vus dans les exemples du **I** et du **II**.

IV. État stable d'un graphe probabiliste

1°) Définition [état stable ou état stationnaire ou distribution invariante]

On considère un graphe probabiliste d'ordre *n* associé à une expérience donnée.

Matrice de transition en colonnes :

On note A la matrice de transition en colonnes du graphe.

Un **état stable** ou **état stationnaire** ou **distribution invariante** est une matrice unicolonne S à *n* lignes vérifiant les conditions suivantes :

C_1 : Les coefficients de S sont positifs ou nuls ;

C_2 : La somme des coefficients de S est égale à 1 ;

C_3 : $AS = S$.

Matrice de transition en lignes :

On note B la matrice de transition en lignes du graphe.

Un **état stable** est une matrice uniligne S à *n* colonnes vérifiant les conditions suivantes :

C_1 : Les coefficients de S sont positifs ou nuls ;

C_2 : La somme des coefficients de S est égale à 1 ;

C_3 : $SB = S$.

Un **état stable** ou **état stationnaire** ou **distribution invariante** est un état probabiliste qui n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience.

On notera que, par définition, tous les coefficients d'un état stable doivent être positifs ou nuls et que leur somme est égale à 1.

2°) Propriété [condition nécessaire et suffisante pour que la suite des états soit constante]

Cette propriété a déjà été vue dans le cours sur les puissances de matrices.
Nous reprenons cependant ici tout ce qui a été dit.

On reprend les notations du paragraphe précédent.
On note X_n la matrice colonne correspondant à l'état probabiliste après *n* déplacements sur le graphe.
On rappelle la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$ (relation qui lie 2 états successifs).

La suite (X_n) est constante si et seulement X_0 est un état stable c'est-à-dire $AX_0 = X_0$.

Démonstration :

• On suppose que la suite (X_n) est constante.
On sait que alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = X_n$. On aura en particulier $X_1 = X_0$ donc $AX_0 = X_0$.

• Réciproquement, on suppose que X_0 est un état stable.
On démontre alors aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = X_n$ et donc que la suite (X_n) est constante.

3°) Exercice-type

On reprend la matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste à deux états considéré dans la situation du **I** : $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'il existe un unique état stable S (ou distribution invariante ou distribution stationnaire) que l'on déterminera.

On cherche donc $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les conditions :

C_1 : *x* et *y* positifs ou nuls ;

C_2 : $x + y = 1$;

C_3 : $AS = S \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,95x + 0,03y = x \\ 0,05x + 0,97y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0,05x = 0,03y \quad \text{(on obtient deux fois la même équation)}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3y \quad (1')$$

On utilise la condition $x + y = 1 \quad (2)$.

Compte tenu de (2), l'égalité $(1')$ donne $5(1 - y) = 3y \quad (1'')$.

$$(1'') \Leftrightarrow y = \frac{5}{8}$$

(2) donne alors $x=\dfrac{3}{8}$.

Les valeurs de x et y obtenues sont des réels positifs ou nuls compris entre 0 et 1 donc les conditions C_1 et C_2 sont vérifiées.

On en déduit qu'il existe un unique état stable ou une unique distribution invariante $S=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{8}\\ \dfrac{5}{8}\end{pmatrix}$.

On retrouve l'état limite obtenu dans le **I**.

On peut aussi pu utiliser directement la calculatrice pour résoudre le système $\begin{cases}0,95x+0,03y=x\\ 0,05x+0,97y=y\\ x+y=1\end{cases}$.

4°) Remarques

Le terme d'état a été introduit dans le **I. 1°)**. Il sert à désigner des événements qui correspondent à des sommets du graphe.
Le terme d'état probabiliste stable n'a rien à voir. Il désigne une matrice colonne ou une matrice ligne.

V. Comportement asymptotique d'une marche aléatoire sur un graphe probabiliste ; convergence

1°) Objectif du paragraphe

On reprend les notations du paragraphe précédent.
On s'intéresse à la convergence de la suite (X_n) des états.

D'après le paragraphe précédent, dans le cas particulier où X_0 est un état stable, la suite (X_n) est constante et donc converge vers X_0.

Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas général. Beaucoup de résultats ont déjà été vus dans le chapitre sur les puissances de matrices. Nous nous contenterons de les redonner en les adaptant au cas de matrices représentant des états.

2°) Propriété [la limite si elle existe est un état stable]

On reprend les notations du paragraphe précédent.

Si la suite (X_n) converge, alors sa limite L est un état stable c'est-à-dire $AL=L$.

La démonstration est facile.

3°) Propriété [convergence de la suite des puissances]

Si la suite (A^n) converge, alors :

- sa limite M est une matrice vérifiant les conditions d'une matrice de transition en colonnes à savoir : tous les coefficients sont positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1.

- quel que soit l'état initial X_0, la suite (X_n) converge vers la matrice MX_0.

La démonstration est facile.

4°) Propriété de convergence (admise sans démonstration)

• Rappel : théorème fondamental donné dans le chapitre sur les puissances de matrices

Soit A une matrice carrée d'ordre n stochastique en colonnes.

- Si aucun coefficient de A n'est nul, alors la suite de matrices (A^n) converge vers une limite M.

- De plus, M est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1\\ \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$ où α_1, α_2, …, α_n sont des réels positifs ou nuls dont la somme est égale à 1.

Ce théorème reste vrai lorsqu'il existe une puissance de A dont aucun coefficient n'est nul.

• Conséquence :

Pour tout graphe probabiliste d'ordre n dont la matrice de transition possède une puissance qui ne comporte pas de 0, la suite (X_n) converge vers un état stable S indépendant de X_0.

En effet, $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ avec $M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1\\ \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$ où α_1, α_2, …, α_n sont des réels positifs ou nuls dont la somme est égale à 1.

Donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} MX_0$

Posons $X_0 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ où t_1, t_2, …, t_n sont des réels positifs ou nuls dont la somme est égale à 1.

$$MX_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 t_1 + \alpha_1 t_2 + ... + \alpha_1 t_n \\ \alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2 + ... + \alpha_2 t_n \\ \vdots \\ \alpha_n t_1 + \alpha_n t_2 + ... + \alpha_n t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 (t_1 + t_2 + ... + t_n) \\ \alpha_2 (t_1 + t_2 + ... + t_n) \\ \vdots \\ \alpha_n (t_1 + t_2 + ... + t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \times 1 \\ \alpha_2 \times 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

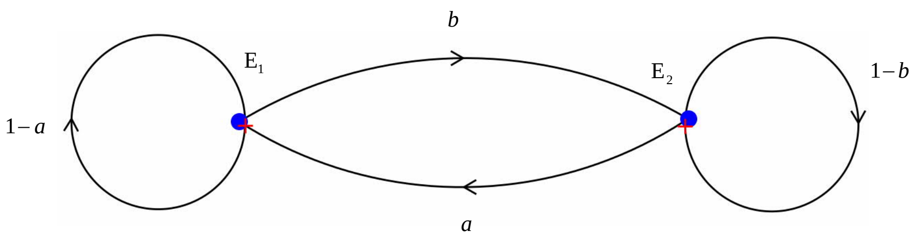
On utilise $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$.

On observe que le résultat est bien indépendant de l'état initial X_0.
C'est une condition suffisante, non nécessaire.

En fait, cette année, nous utiliserons assez peu ce théorème en pratique. Lorsque nous chercherons un état stable, nous nous ramènerons à une équation matricielle et nous montrerons en la résolvant qu'il y a une unique solution.
La propriété est plutôt donnée à titre culturel.

VI. Résultats généraux pour les chaînes de Markov à deux états

1°) Notations



On note :

a la probabilité de passer de l'état E_1 à l'état E_2 ;
b la probabilité de passer de l'état E_2 à l'état E_1.

a et b sont des réels de l'intervalle $[0\,;1]$.

La matrice de transition en colonnes du graphe est $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$.

2°) Puissances de A

On avait démontré dans le chapitre sur les puissances de matrices la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix}$$

Il n'est pas nécessaire d'apprendre cette formule par cœur.

3°) État stable

Propriété (à ne pas apprendre par cœur) :

Lorsque a et b ne sont pas tous les deux nuls, il existe un unique état stable (distribution invariante ou stationnaire) $S = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{a+b} \\ \dfrac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

La démonstration est facile (à faire soi-même).

Commentaires :

- Ce résultat n'est pas à savoir par cœur.
- Il permet cependant de vérifier les résultats de certains exercices (par exemple, dans l'exercice-type).

4°) Convergence

- **Résultat fondamental :**

Lorsque $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a\,;b) \neq (1;1)$, $A^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix}$.

La démonstration se fait facilement en utilisant l'encadrement $-1 < 1-a-b < 1$ facile à justifier.

Il n'est pas nécessaire de l'apprendre par cœur.

● **Conséquence :**

Lorsque $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et $(a\,;b)\neq(1;1)$, la suite des distributions de probabilités converge vers $S=\begin{pmatrix}\dfrac{b}{a+b}\\ \dfrac{a}{a+b}\end{pmatrix}$ quel que soit l'état initial.

Il n'est pas nécessaire d'apprendre ce résultat par cœur.

5°) Adaptation dans le cas d'une matrice de transition en lignes

$$B=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad B^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}$$

Lorsque a et b ne sont pas tous les deux nuls, il existe un unique état stable $S'=\begin{pmatrix}\dfrac{b}{a+b} & \dfrac{a}{a+b}\end{pmatrix}$.

Lorsque $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ et $(a\,;b)\neq(1;1)$, la suite des distributions de probabilités converge vers S' quel que soit l'état initial.

Il n'existe pas de résultats similaires pour les chaînes de Markov à trois états.

VII. Simulation d'une chaîne de Markov

1°) Cas de l'exemple du I (chaîne de Markov à deux états)

On reprend l'exemple du **I**.
On peut se contenter d'étudier l'évolution de l'état E_1, celui de l'état E_2 se déduisant immédiatement.
On utilisera la variable a qui vaudra 1 si l'individu est atteint et 0 sinon.

```
Fonction changement(a)
    r ← un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1]
    Si a = 1
        Si r ⩽ 0,05
            a ← 0
        FinSi
    Sinon
        Si r ⩽ 0,03
            a ← 1
        FinSi
    FinSi
    Renvoyer a
```

Il est ensuite possible d'écrire ensuite une fonction qui renvoie la fréquence des jours où l'individu a été atteint.

Programme Python :

```python
from random import random

def changement(a):
    r=random()
    if a==1:
       if r<=0.05:
          a=0
    else:
       if r<=0.03:
          a=1
    return a

def simulation(n):
    a=1
    c=0
    for i in range (1,n+1):
        a=changement(a)
        if a==1:
           c=c+1
    f=c/n
    return f
```

En faisant tourner le programme, on peut comparer le résultat des fréquences avec celui de la probabilité limite.

On vérifie ainsi la cohérence des résultats des fréquences avec ceux obtenus par calcul correspondant au modèle théorique.

2°) Situation générale d'une chaîne de Markov à plusieurs états

Dans le cas d'une situation pouvant être modélisée par une marche aléatoire sur un graphe à n sommets (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2), on utilise des listes comme nous le verrons en exercice.
Il est possible d'obtenir ainsi des échantillons de fréquence.