TS

Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

Plan du chapitre :

Dans tout le chapitre, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Nous allons reprendre l'étude de la loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$ qui été abordée dans le chapitre sur la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$ (choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$).

La loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ permet de modéliser le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Il s'agit d'un cas particulier de loi à densité, simple mais très important.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudiées les lois à densité sur l'intervalle $[a\,;b]$ dans le cas général avec la loi notion centrale de densité de probabilité.
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un cas particulier de densité de probabilité ce qui va nous permettre d'appliquer les notions et résultats du chapitre précédente et établir ainsi un certain nombre de résultats à connaître dans ce cas.

I. Définition

1°) Propriété-définition

- La fonction *f* définie sur l'intervalle [*a* ; *b*] par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur **[***a* ; *b***]**.
- La loi de probabilité *P* sur **[***a* ; *b*] admettant *f* pour densité de probabilité est appelée **loi uniforme sur [*a* ; *b*]**.

2°) Justification

On notera que la fonction *f* est constante sur l'intervalle [*a* ; *b*]. C'est donc une fonction très simple.

La fonction *f* vérifie les trois conditions C_1, C_2, C_3 d'une densité de probabilité.

C_1 : *f* est définie et continue sur [*a* ; *b*] (évident car une fonction constante sur un intervalle est continue sur cet intervalle).

C_2 : *f* est positive ou nulle sur [*a* ; *b*] (évident car $a < b$)

$$C_3 : \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$$

(On applique la formule : intégrale d'une fonction constante $=$ constante $\times$ différence des bornes)

On pourrait représenter graphiquement la fonction *f*.

3°) Commentaires

• On a déjà vu la loi uniforme sur [0 ; 1] qui correspond au cas où $a=0$ et $b=1$.

La loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] admet pour densité de probabilité la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

• La loi uniforme sur [a ; b] modélise le choix d'un réel au hasard dans l'intervalle [a ; b].

Cette loi est notée **U ([a ; b])**.

II. Probabilité d'un intervalle

1°) Propriété

Dans toute la suite, P désigne la probabilité uniforme sur [a ; b].
On applique la définition donnée dans le chapitre précédent.

La probabilité de tout intervalle $[\alpha\,;\beta]\subset[a\,;b]$, en posant $P([\alpha\,;\beta])=\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

2°) Autre écriture

$$P([\alpha\,;\beta])=\frac{\text{longueur de l'intervalle }[\alpha\,;\beta]}{\text{longueur de l'intervalle }[a\,;b]}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

III. Variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a ; b]

1°) Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [a ; b] pour exprimer qu'elle prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle [a ; b] et que sa loi de probabilité est la probabilité uniforme sur [a ; b].

2°) Propriété fondamentale

Pour tous réels α et β appartenant à [a ; b] tels que $\alpha\leqslant\beta$, on a $P(\alpha\leqslant X\leqslant\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

3°) Autres propriétés

Ce sont les mêmes propriétés que pour n'importe quelle loi de probabilité continue sur un intervalle fermé borné.

• Pour tout réel α appartenant à [a ; b], on a $P(X=\alpha)=0$.

• Pour tout réel α appartenant à [a ; b], $P(X>\alpha)=1-P(X\leqslant\alpha)$.

• Pour tous réels α et β appartenant à [a ; b] tels que $\alpha\leqslant\beta$, $P(\alpha<X<\beta)=P(X<\beta)-P(X\leqslant\alpha)$
$=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$

• Pour une loi continue dans les calculs de probabilité, on peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement. Par exemple, $P(X>\alpha)=P(X\geqslant\alpha)$.

IV. Espérance et variance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [a ; b]

On applique la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire à densité donnée dans le chapitre précédent.

1°) Propriété (à connaître par cœur)

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [a ; b].

• L'**espérance mathématique** de X est égale à $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

• La **variance** de X est égale à $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

2°) Démonstration

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_a^b x\times\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x \quad \text{(définition de l'espérance)}\\
&=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b\\
&=\frac{1}{b-a}\times\frac{b^2-a^2}{2}\\
&=\frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)(b+a)}{2}\\
&=\frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Ce résultat est « logique » c'est-à-dire conforme à l'intuition quand on pense que l'espérance d'une variable aléatoire est une moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x \quad \text{(définition de la variance)}\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right]_a^b\\
&= \frac{1}{b-a}\times\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\\
&= \frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)^3-(a-b)^3}{3\times 8}\\
&= \frac{1}{b-a}\times\frac{2(b-a)^3}{3\times 8}\\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

3°) Écart-type

Par définition, l'écart-type d'une variable aléatoire est égale à la racine carrée de sa variance.

On reprend les mêmes notations que précédemment.

Grâce au résultat obtenu dans le paragraphe 2°), l'écart-type de X est donné par la formule $\sigma(\mathrm{X})=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$ que l'on peut aussi écrire $\sigma(\mathrm{X})=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

V. Fonction de répartition

1°) Rappel

On reprend la définition de la fonction d'une variable aléatoire à densité donnée dans le chapitre précédent.

> X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.
>
> On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=P(\mathrm{X}\leqslant x)$.

2°) Propriété

> X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.
>
> La fonction de répartition F de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $\forall x \in\,]-\infty\ ; a[\quad \mathrm{F}(x)=0$
>
> $\forall x \in [a\ ;\ b] \quad \mathrm{F}(x)=\frac{x-a}{b-a}$
>
> $\forall x \in\,]b\ ; +\infty[\quad \mathrm{F}(x)=1$

La démonstration est évidente.

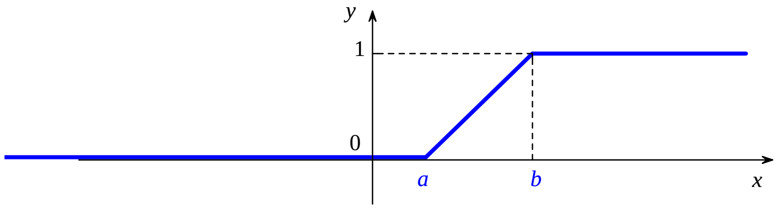
3°) Remarques

- On observe que $\mathrm{F}(a)=0$ et $\mathrm{F}(b)=1$ ce qui est conforme au résultat énoncé dans le chapitre précédent.

- On observe que F est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

- On observe également que $\forall x \in [a\ ;b]\ \ \mathrm{F}'(x)=\frac{1}{b-a}$ ce qui est conforme au résultat énoncé dans le chapitre précédent (quand on dérive la fonction de répartition, on retombe sur la fonction de densité).

- La représentation graphique de la fonction F est donnée par :



4°) Rappel : probabilité d'un intervalle à l'aide de la fonction de répartition

> Pour tout intervalle $[\alpha\ ;\beta]\subset[a\ ;b]$, on a : $P(\alpha\leqslant \mathrm{X}\leqslant\beta)=\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha)$.

Ce résultat n'est pas particulier au cas d'une loi uniforme mais a été déjà vu dans le cas général d'une variable aléatoire à densité sur un intervalle fermé borné.

VI. Application : instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice

1°) La variable aléatoire X qui est égale au nombre affiché par l'instruction « nombre aléatoire » (qui correspond à la commande « ALEA() », ou « RAND », NbreAléat…) suit la loi uniforme sur [0 ; 1[.

2°) Utilisation pour la simulation d'un schéma de Bernoulli

Dans tout le paragraphe, *n* est un entier naturel et *p* un réel compris entre 0 et 1.

a) La variable aléatoire Y qui est égale au nombre affiché par l'instruction ALEA() + *p* suit la loi uniforme sur $[p\,;p+1[$. On a $P([p\,;1[)=\dfrac{1-p}{(1+p)-p}=1-p$ et $P([1\,;1+p[)=\dfrac{(1+p)-1}{(1+p)-p}=p$.

• Si $\boldsymbol{p \leqslant \text{ALEA}()+p<1}$, alors $\mathbf{ENT}\big(\mathbf{ALEA}(\ )+\boldsymbol{p}\big)=\mathbf{0}$.

• Si $\boldsymbol{1 \leqslant \text{ALEA}()+p<1+p}$, alors $\mathbf{ENT}\big(\mathbf{ALEA}(\ )+\boldsymbol{p}\big)=\mathbf{1}$.

À l'aide d'un tableur, on utilise $\mathbf{ENT}\big(\mathbf{ALEA}(\ )+\boldsymbol{p}\big)$ qui donne :
le nombre 1 avec un probabilité égale à *p* et
le nombre 0 avec une probabilité égale $1-p$.

b) L'algorithme suivant affiche le nombre de succès obtenus par la simulation d'un schéma de Bernoulli de paramètres *n* et *p*.

Variables : *n*, *p*, *c*, *x*, *i*

Entrées :
Lire *n*
Lire *p*

Traitement :
c prend la valeur 0
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  x prend la valeur ENT(ALEA() + *p*)
  Si $x=1$
    Alors *c* prend la valeur $c+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher *c*

3°) Simulation de loi uniforme (ou équirépartie) sur $\{0\,;\ldots\,;p\}$

Soit *p* un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Propriété (admise sans démonstration)

Si X suit la loi uniforme sur [0 ; 1], alors la variable aléatoire $Y=E(pX)+1$ suit la loi uniforme sur $\{0\,;\ldots\,;p\}$.

On notera que Y est une variable aléatoire discrète contrairement à X qui est une variable aléatoire continue.

4°) Suites créant le hasard (suite de nombres pseudo-aléatoires) d'après la revue Casio 3'33 (année 2000)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=0{,}421337$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\text{partie décimale}(147\times u_n)$ pour tout entier naturel *n*.

Il s'agit d'une suite bornée dont le comportement est chaotique. Le nuage de points apparaît comme de la neige.

On peut changer la valeur de 147 par un autre nombre. Si on prend par exemple 5, on a un nuage de points en « écailles de poisson ».

Les calculatrices ont d'autres algorithmes, utilisant notamment les générateurs congruentiels linéaires (cf. expériences de télépathie de calculatrice en 1$^{\text{ère}}$ S durant l'année 2011-2012).

VII. Simulation de la loi uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*] à partir de la loi uniforme sur [0 ; 1]

1°) Propriété (admise sans démonstration)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.
La variable aléatoire $Y=bX+a-b$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2°) Application