TS

Lois de probabilités continues (1) : loi uniforme sur [0 ; 1]

Plan du chapitre :

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des expériences aléatoires ne possédant qu'un nombre fini de résultats possibles (exemples : lancer d'une pièce, lancer d'un dé, tirages de boules dans une urne, tirages de cartes…).

Dans ce chapitre et les suivants, nous allons considérer des expériences aléatoires possédant un nombre infini de résultats possibles.

L'objectif va être de définir une loi de probabilité pouvant modéliser ces expériences aléatoires.

I. Rappel : lois de probabilités discrètes ; le modèle d'équiprobabilité

1°) Loi de probabilité sur un univers fini

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ conduisant à un nombre fini de résultats e_1, e_2, …, e_n.
L'univers des possibles associé à $\mathcal{E}$ est donc $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

On définit une **loi de probabilité** P sur l'univers Ω en attribuant aux résultats e_1, e_2, …, e_n des nombres fixes p_1, p_2, …, p_n vérifiant les deux conditions suivantes :
C_1 : pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$
C_2 : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Résultats	e_1	e_2		e_n	
Probabilités	p_1	p_2		p_n	**Total** $= 1$

On dit que P est une **loi de probabilité discrète** car l'univers Ω est fini.

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des résultats qui constituent A.

2°) Loi d'équiprobabilité (ou loi équirépartie)

C'est le cas lorsque tous les résultats ont la même probabilité $\frac{1}{n}$ où n désigne le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire ($n = \text{card}\ \Omega$).

La probabilité d'un événement A est donnée par la **formule de Laplace :**

$$P(\text{A}) = \frac{\text{nombre de résultats possibles pour A}}{\text{nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire}} = \frac{\text{CF}}{\text{CP}}$$

Cette formule s'écrit aussi : $P(\text{A}) = \dfrac{\text{card A}}{\text{card }\Omega}$.

La probabilité d'un événement se calcule comme un quotient ce qui ramène les calculs de probabilités à du dénombrement.

II. Choix d'un nombre au hasard dans [0 ; 1]

1°) Expérience aléatoire considérée

E : choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1].

Cette expérience a été étudiée en seconde (simulation sur calculatrice avec la touche « Random » ou sur tableur avec la fonctionnalité « ALEA() » ; en fait, un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1[).

On peut cependant objecter :
- qu'il s'agit de nombres pseudo-aléatoires produits par un programme intégré qui reconstitue le hasard ;
- que les nombres affichés sont des nombres décimaux dont le nombre de chiffres est limité.

2°) Univers des possibles associé à *E*

$\Omega = [0\,;1]$

On est dans un **cas continu** car les résultats possibles peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

3°) Problème

Comment modéliser le hasard dans ce cas ?
C'est-à-dire comment modéliser l'expérience aléatoire par une loi de probabilité P ?

Comment passer du cas discret au cas continu ?

Quelle est la probabilité de chaque nombre ?

III. Premier essai d'adaptation de la formule de Laplace

1°) Objection

L'ensemble des résultats est infini.
Nous ne sommes plus dans le cas d'équiprobabilité discret ; on ne peut donc normalement pas appliquer la formule de Laplace ($\dfrac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$).

2°) Probabilité d'un résultat

Cela dit, en admettant qu'elle s'applique, pour tout x de [0 ; 1], on peut écrire $\boxed{P(\{x\}) = 0}$.

On observe donc que la probabilité d'un singleton est égale à 0.

3°) Obstacle

On doit avoir $\boxed{P([0\,;1]) = 1}$ (par définition d'une loi de probabilité).
On voit que la probabilité de [0 ; 1] n'est pas égale à la somme des probabilités de tous les nombres de l'intervalle [0 ; 1] (somme infinie).

De même, pour n'importe quel intervalle inclus dans l'intervalle [0 ; 1].

Dans la suite, on va s'intéresser à la probabilité d'obtenir un réel dans un intervalle [α ; β] donné, inclus dans l'intervalle [0 ; 1].

IV. Loi de probabilité uniforme sur un intervalle fermé borné quelconque

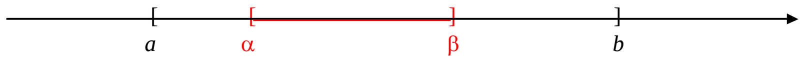
1°) Transposition de la formule de Laplace

On va considérer le cas plus général du choix d'un nombre au hasard dans un intervalle $[a\,;b]$ ($a < b$).

Nous admettrons que la formule de Laplace (quotient) peut se transposer ainsi :

La probabilité d'obtenir un nombre dans l'intervalle [α ; β] inclus dans $[a\,;b]$ est égale à

$$P([\alpha\,;\beta]) = \frac{\text{longueur de l'intervalle } [\alpha\,;\beta]}{\text{longueur de l'intervalle } [a\,;b]} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$



2°) Résultat admis

Nous admettrons sans démonstration que le choix d'un nombre au hasard dans un intervalle $[a\,;b]$ peut être modélisé par une loi de probabilité P appelée **loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*]** vérifiant pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [a\,;b]$, $P([\alpha\,;\beta]) = \dfrac{\text{longueur de l'intervalle } [\alpha\,;\beta]}{\text{longueur de l'intervalle } [a\,;b]} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

3°) Cas d'une variable aléatoire

X est une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $[a\,;b]$.

On dit que X suit la **loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*]** pour exprimer que pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [a\,;b]$, $P(X \in [\alpha\,;\beta]) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = \dfrac{\text{longueur de l'intervalle } [\alpha\,;\beta]}{\text{longueur de l'intervalle } [a\,;b]} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

On pourra noter que X suit la loi **U** ($[a\,;b]$).

V. Modélisation du choix d'un nombre au hasard dans [0 ; 1]

Dans ce paragraphe, on revient au choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1].
On applique les résultats du paragraphe précédent avec $a = 0$ et $b = 1$.

1°) Propriété

Nous admettrons sans démonstration que le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1] peut être modélisé par une loi de probabilité P appelée **loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]** vérifiant pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [0\,;1]$, $P([\alpha\,;\beta]) = \dfrac{\beta-\alpha}{1-0} = \beta-\alpha = \text{longueur de l'intervalle } [\alpha\,;\beta]$.
(Il s'agit de la probabilité d'obtenir un nombre dans l'intervalle [α ; β].)

2°) Propriétés

$$P(\{\alpha\}) = P([\alpha\,;\alpha]) = \frac{\alpha-\alpha}{1-0} = 0$$

$$P([\alpha\,;\beta]) = P([\alpha\,;\beta[) = \beta-\alpha$$

3°) Exemple

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1].
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre compris entre 0,2 et 0,8 ?

L'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi de probabilité P uniforme sur [0 ; 1].

$$P([0,2\,;0,8]) = 0,8-0,2 = 0,6$$

La probabilité d'obtenir un nombre compris entre 0,2 et 0,8 au sens large est égale à 0,6.

4°) Cas d'une variable aléatoire

On définit de la même manière qu'au paragraphe précédent la notion de variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] (**U** ([0 ; 1]).

VI. Autre approche du choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1]

Dans ce paraphe, on s'intéresse toujours au choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1].

1°) Autre écriture d'une probabilité d'intervalle : écriture intégrale

On remarque que : $P([\alpha\,;\beta]) = \beta-\alpha = [\ x\ ]_\alpha^\beta = \displaystyle\int_\alpha^\beta 1\ \mathrm{d}x$

$$P([\alpha\,;\beta]) = \int_\alpha^\beta 1\ \mathrm{d}x$$

On a compliqué les choses mais cela va nous permettre de voir que ce que l'on fait est un cas particulier d'un cas général qui sera étudié dans le paragraphe **VII**.

2°) Introduction d'une fonction

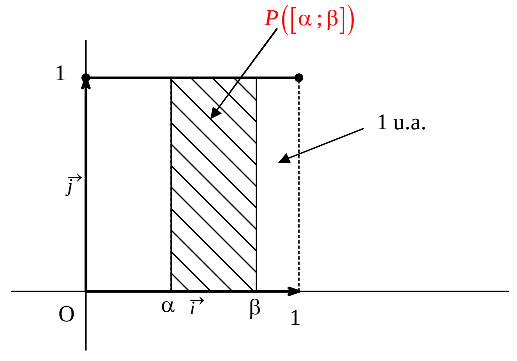
On considère la fonction f : $\begin{array}{rcl}[0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1\end{array}$ appelée **fonction de densité de la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]**.

Cette fonction vérifie les 3 conditions :

C_1 : f est définie et continue sur [0 ; 1].

C_2 : f est positive ou nulle sur [0 ; 1].

C_3 : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 1$ (condition de l'aire sous la courbe)



VII. Généralisation

Ce que nous avons fait dans les paragraphes précédents est un cas particulier d'une situation plus générale qui va être exposée ici.

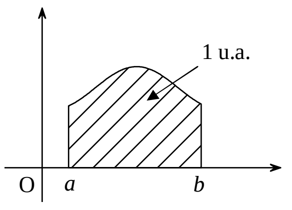
1°) Définition d'une fonction densité de probabilité sur un intervalle [a ; b]

Pour définir une loi de probabilité P sur un intervalle [a ; b] ($a < b$), il suffit de se munir d'une **densité de probabilité** f vérifiant les trois conditions C_1, C_2, C_3 :

C_1 : f est définie et continue sur [a ; b].

C_2 : f est positive ou nulle sur [a ; b]

C_3 : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1$



On posera pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [a\,;b]$, $P([\alpha\,;\beta]) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$.

2°) Propriétés

$$P(\{\alpha\}) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$
$$P(]\alpha\,;\beta]) = P([\alpha\,;\beta])$$

3°) Lien avec le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1]

Pour le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle [0 ; 1], on a modélisé l'expérience aléatoire par la loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0 ; 1].
Cette loi de probabilité correspond à la densité de probabilité

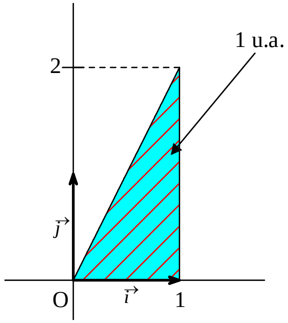
$$f : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

En changeant de fonction de densité c'est-à-dire en prenant une fonction *f* définie sur [0 ; 1] vérifiant les conditions C_1, C_2, C_3, on peut définir une autre loi de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] qui peut être utile dans certaines situations.

On peut aussi se placer sur un intervalle [*a* ; *b*] autre que [0 ; 1].

4°) Exemple

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$



La fonction *f* vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 (c'est quasiment évident).

La fonction *f* permet de définir une loi de probabilité *P* sur l'intervalle [0 ; 1].

On posera pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta] \subset [0\,;1]$, $P([\alpha\,;\beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} 2x\ \mathrm{d}x = \left[x^2\right]_{\alpha}^{\beta} = \beta^2 - \alpha^2$.