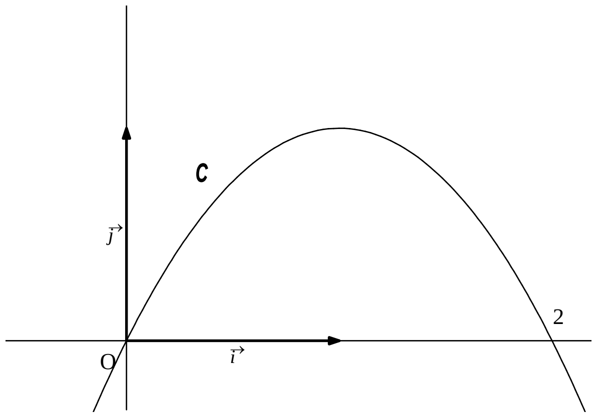
Exercices de calculs d'aires

I. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

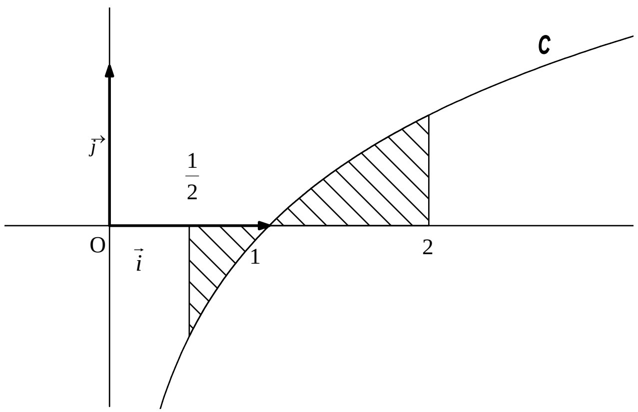
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Hachurer le domaine sur la figure ci-dessous.



II. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

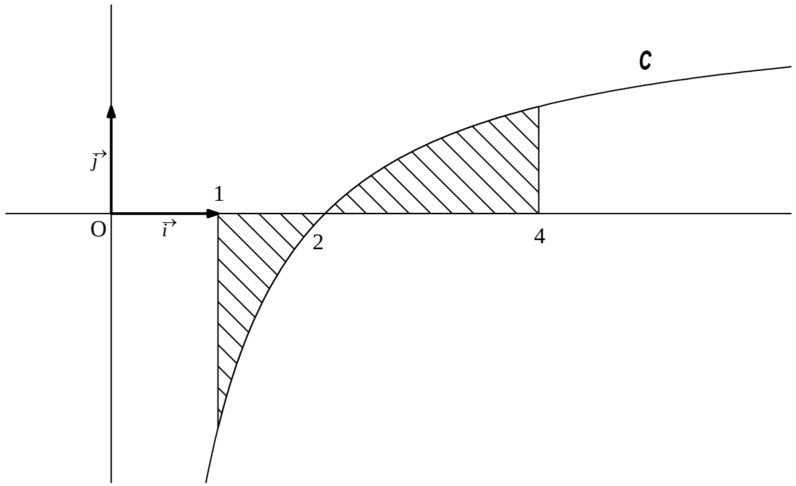
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.

On rappelle que la fonction $\varphi : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction f.



III. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

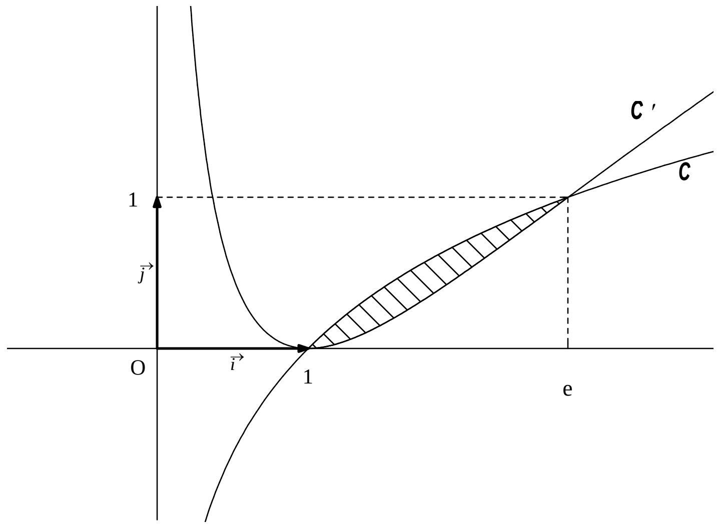
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.



IV. On donne ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectives des fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto (\ln x)^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 3x$.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.



Corrigé

I. $f : x \mapsto 2x - x^2$

f est continue et positive ou nulle sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2\\ &= 4 - \frac{8}{3}\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$\mathcal{A} = \dfrac{4}{3}$ **u.a.**

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

N.B. : Le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est défini par le système d'inéquations $\begin{cases}0 \le x \le 2\\ 0 \le y \le 2x - x^2\end{cases}$.

II. $f : x \mapsto \ln x$

Le domaine considéré est la réunion de deux domaines : le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,;2]$.

L'aire du domaine hachuré est la somme des aires de ces deux domaines.

f est continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$; f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$ donc l'aire du domaine hachuré est donnée par :

$$\mathcal{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \text{ avec } \mathrm{I}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de I_1 et de I_2, on utilise le fait qu'une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui n'est pas exigible mais qu'il est conseillé de savoir).
Sinon, on peut utiliser une IPP pour chacune des deux intégrales.

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1 \quad \left(\text{on utilise } \ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + 2\ln 2 - 1\\ &= \frac{-\ln 2 + 4\ln 2 - 1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\ln 2 - 1}{2} \text{ u.a.}}$$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

* On peut aussi écrire :

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \quad f(x) \leqslant 0$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,;2\right] \quad f(x) \geqslant 0$

III. $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x}$

f est continue sur l'intervalle $[1\,;4]$; f est négative ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$ et positive ou nulle sur l'intervalle $[2\,;4]$ donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \text{ avec } \mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On calcule séparément $-\mathrm{I}_1$ et I_2.

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x-4}{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2 - \frac{4}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \left[2x - 4\ln x\right]_1^2 = 4 - 4\ln 2 - 2 = 2 - 4\ln 2$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{2x-4}{x}\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(2 - \frac{4}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \left[2x - 4\ln x\right]_2^4 = 8 - 8\ln 2 - 4 + 4\ln 2 = 4 - 4\ln 2$$

(on utilise $\ln 4 = 2\ln 2$)

$\mathcal{A} = -(2-4\ln 2)+4-4\ln 2$

$\boxed{\mathcal{A} = 2 \text{ u.a.}}$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

IV. $f : x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $g : x \mapsto (\ln x)^2$

1°) **Calculons la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 3x$.**

$\varphi'(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

2°) **Calcul de l'aire hachurée.**

$\boxed{\mathcal{A} = 3 - \text{e} \text{ u.a.}}$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

N.B. : La partie hachurée est définie par le système d'inéquations $\begin{cases} 1 \leq x \leq \text{e} \\ (\ln x)^2 \leq y \leq \ln x \end{cases}$.