TS

Fonctions puissances entières
Racine n-ième
Exponentielle de base réelle

I. Fonction puissance n-ième

1°) Définition

n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
On appelle fonction **puissance n-ième** la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

2°) Ensemble de définition

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

3°) Dérivée

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'_n(x) = nx^{n-1}$

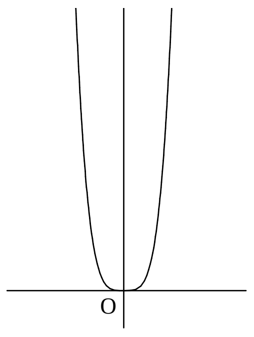
4°) Tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$

x	0	$+\infty$
Variation de f_n	0	$\nearrow$ $+\infty$

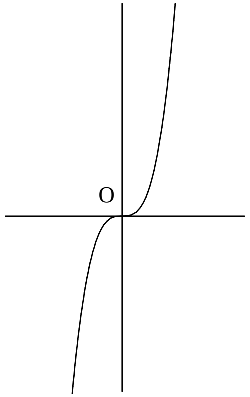
5°) Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

6°) Allure de la représentation graphique



***n* pair**



***n* impair**

II. Racine n-ième d'un réel positif ou nul

1°) Démonstration (ROC)

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Le corollaire du TVI s'applique.

$f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$
Donc pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

2°) Définition

n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
a est un réel positif ou nul.
Il existe un unique réel x positif ou nul tel que $x^n = a$.
Ce réel est appelé **la racine n-ième** de a.
On note $x = \sqrt[n]{a}$.

3°) Exemples

$n = 2$: $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (car la racine carrée est la plus utilisée)

$n = 3$: $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[3]{a}$ est appelé **la racine cubique** de a.

$\sqrt[3]{8} = 2$ car $\begin{cases} 2^3 = 8 \\ 2 \geqslant 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{2} \ \longrightarrow$ calculatrice (voir ci-dessous)
$\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel.

$x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8}$

$\Leftrightarrow x = -2$

4°) Utilisation de la calculatrice

• Calculatrice TI

Pour obtenir $\sqrt[n]{a}$ où n est un entier naturel et a un réel positif ou nul, on doit taper d'abord le « n » puis $\boxed{\text{math}}$ $\sqrt[x]{\ }$ (touche 5) puis le « a ».

Exemple : $\sqrt[5]{2}$

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{math}}$ choisir $\sqrt[x]{\ }$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{entrer}}$

$\sqrt[5]{2} = 1{,}14869835...$

Cas particulier pour la racine cubique :

Dans $\boxed{\text{math}}$ MATH, choisir 4 : $\sqrt[3]{\ }($.

• Calculatrice CASIO Graph 35+

On a une touche $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$: pour cela, faire $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$.

5°) Remarque

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[n]{a} \geqslant 0}$$

6°) Propriétés qui résultent de la définition

- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[n]{a^n} = a$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

7°) Écriture d'une racine *n*-ième sous forme de puissance réelle

• Démonstration

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a}$

Définition du chapitre 2 sur les puissances réelles ($a^b = e^{b \ln a}$).
Ici, on a un exposant fractionnaire.

$$\left.\begin{array}{l} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a \\ a^{\frac{1}{n}} > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

• Propriété à retenir

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a}}$$

• Exemples

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

• Utilisation : calculs de racines *n*-ièmes avec la calculatrice

- **Sur TI,** pour calculer $\sqrt[3]{2}$, on tape : 2 $\boxed{\wedge}$ (1 : 3) $\boxed{\text{EXE}}$.

- **Sur CASIO Graph 35+,** on a une touche $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$: pour cela, faire $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$.

• Propriété intéressante à connaître

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\ln a}$$

III. Propriétés algébriques des racines *n*-ièmes

1°) Propriété 1

• Énoncé

$n \geqslant 2$

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

• Démonstration : ROC

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \times b \\ \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$

2°) Propriété 2

• Énoncé

$n \geqslant 2$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Démonstration : ROC

Astuce de départ : $\frac{a}{b} \times b = a$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b} \times b} = \sqrt[n]{a}$$

$\downarrow$ propriété 1

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a}$$

Donc : $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3°) Propriété 3 (propriété des exposants fractionnaires)

• Énoncé

p et q sont deux entiers naturels tels que $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

• Démonstration : ROC

$$a > 0 \quad a^{\frac{p}{q}} = a^{p \times \frac{1}{q}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

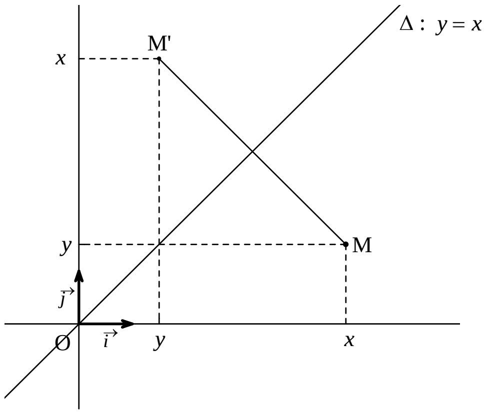
$\uparrow$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

IV. Représentation graphique de la fonction racine *n*-ième dans le plan muni d'un repère orthonormé

1°) Rappel

Rappel : la symétrie par rapport à la 1[ère] bissectrice dans un repère orthonormé.



$$P \xrightarrow{S_\Delta} P$$

$$\mathrm{M}\left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \mapsto \mathrm{M'}\left| \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array} \right.$$

2°) Application

$\mathcal{C}$: $y = x^n$ avec $x \geqslant 0$

$\mathcal{C}$ ': $y = \sqrt[n]{x}$ avec $x \geqslant 0$

But : On veut démontrer que $\mathcal{C}$ ' est l'image de $\mathcal{C}$.

$\mathrm{M}(x\,;\,y)$ est un point du plan tel que $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

On note M' son image par S_Δ.

On sait que $\mathrm{M}'\left|\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right.$.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^n \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

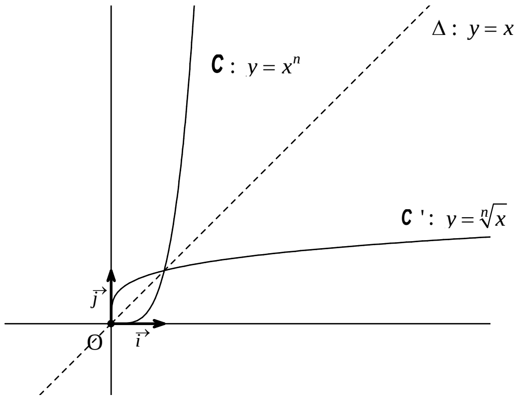
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = \sqrt[n]{x'} \\ x' \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M}' \in \mathcal{C}'$$

3°) Tracés

On trace d'abord $\mathcal{C}$ puis $\mathcal{C}$ '.



V. Fonction puissance d'exposant quelconque

1°) Définition

α est un réel fixé.

On appelle **« fonction puissance d'exposant α »** la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

2°) Dérivabilité

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (composée).

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x}\mathrm{e}^{\alpha \ln x} \quad \text{(on écrit } f(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \text{ avec } u(x) = \alpha \ln x\text{)}$$

$$= \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha$$

$$= \alpha \times x^{\alpha - 1}$$

On retient : $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \times x^{\alpha-1}}$.

On généralise aux puissances réelles un résultat connu pour les puissances entières.

3°) Dérivée de la puissance d'une fonction

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) > 0$.
α est un réel fixé.

$$f : x \mapsto [u(x)]^\alpha = \mathrm{e}^{\underbrace{\alpha \ln u(x)}_{v(x)}}$$

f est définie sur I.

f est dérivable sur I d'après la règle sur la composée de fonctions.

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = v'(x)\mathrm{e}^{v(x)}$$

$$f'(x) = \alpha \times \frac{u'(x)}{u(x)} \times \mathrm{e}^{\alpha \ln[u(x)]}$$

$\forall x \in \mathrm{I} \quad v'(x) = \alpha \times \underbrace{\dfrac{u'(x)}{u(x)}}_{\text{dérivée logarithmique de } u}$

Donc :

$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \alpha \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} \times [u(x)]^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha \times u'(x) \times [u(x)]^{\alpha-1}$

On retient :

$$\boxed{(u^{\alpha})' = \alpha u' \times u^{\alpha-1}}$$

Cette règle généralise aux puissances réelles la règle connue pour les exposants entiers : $(x^n)'$.

Astuce : pour dérivée les racines *n*-ièmes, on les écrit sous forme de puissances.

Exemple : $\sqrt[3]{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$

Thibaud Fiala (TS1) le 25-5-2016

L'utilisation des racines *n*-ièmes est pratique pour retrouver certaines formules de dérivées.

$\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$

On peut utiliser la formule : $(x^n)'$.

VI. Fonctions exponentielles de base quelconque

1°) Définition

a est un réel tel que $a > 0$.
On appelle « **fonction exponentielle de base *a*** » la fonction $\exp_a$: $x \mapsto a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

(**N.B. :** $\exp_{\mathrm{e}} = \exp$)

2°) Ensemble de définition

$\mathcal{D}_{\exp_a} = \mathbb{R}_+^*$

3°) Dérivabilité – dérivée

$\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les composées)

$f(x) = \mathrm{e}^{\overbrace{x \ln a}^{u(x)}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$

$= \ln a \times \mathrm{e}^{x \ln a}$

constante

$= \ln a \times a^x$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a'(x) = \ln a \times a^x}$$

(**Exemple :** $(2^x)' = \ln 2 \times 2^x$)

4°) Tableau de variation

Le signe de $\exp'_a(x)$ dépend du signe de ln a.

1^er^ cas : $\boxed{a > 1}$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\exp'_a(x)$	+	
Variation de $\exp_a$	0 ↗	$+\infty$

2^e^ cas : $\boxed{a < 1}$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\exp'_a(x)$	–	
Variation de $\exp_a$	$+\infty$ ↘	0

3^e^ cas : $\boxed{a = 1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_1(x) = 1^x = 1$

$\exp_1$ est la fonction constante égale à 1.