TS1

Contrôle du jeudi 28 février 2013 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………….

Note : … / 20

I. (5 points)

Compléter sans rature et le plus lisiblement possible le tableau suivant où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\sin x \times \mathrm{e}^{-\cos x}$	$\mathbb{R}$	……………………………………………
$(2x-1)^9$	$\mathbb{R}$	……………………………………………
$\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$	$\mathbb{R}$	……………………………………………
$\dfrac{3}{4x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$	……………………………………………
$\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^6}$	$\mathbb{R}$	……………………………………………

II. (7 points)

Dans tout l'exercice, θ est un réel fixé.

1°) Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$z_1=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $\qquad$ $z_2=-3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $\qquad$ $z_3=-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

$z_1=$ ………… $\qquad$ $z_2=$ ………… $\qquad$ $z_3=$ …………

2°) On reprend les nombres complexes définis à la question précédente.
Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$z_4={z_1}^4{z_2}^2$ $\qquad$ $z_5=z_2z_3$ $\qquad$ $z_6=-\dfrac{1}{z_2}$

$z_4=$ ………… $\qquad$ $z_5=$ ………… $\qquad$ $z_6=$ …………

3°) On pose $z_7=1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
A-t-on $\overline{z_7}=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$? Justifier.

……

……

……

Dans les exercices **III** et **IV**, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

III. (4 points)

Soit a un nombre complexe non nul.
On note A et B les points du plan d'affixes respectives a et $\mathrm{i}a$.
Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points)

On note A le point d'affixe 4.

1°) On note E l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\arg(z-4)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$$M \in E \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

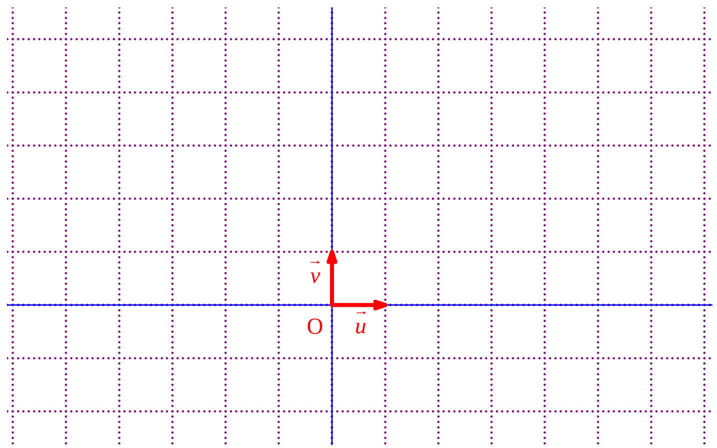
Tracer avec précision l'ensemble E sur la figure ci-dessous.

2°) On note F l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\arg\frac{z}{z-4}=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$$M \in F \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tracer avec précision l'ensemble F sur la figure ci-dessous.



Bonus

(à traiter sur une copie à part, s'il reste du temps à la fin)

Soit z un nombre complexe de module 1, différent de i et de – i.

On pose $Z=\frac{z}{1+z^2}$.

Démontrer que Z est un réel.

Corrigé du contrôle du 28-2-2013

I.

$f(x)=$	I	$F(x)=$
$\sin x \times e^{-\cos x}$	$\mathbb{R}$	$e^{-\cos x}$
$(2x-1)^9$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{(2x-1)^{10}}{10}$
$e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)$	$\mathbb{R}$	$\cos\left(e^{-x}\right)$
$\dfrac{3}{4x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$	$\dfrac{3}{4}\ln(4x+1)$
$\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^6}$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{10\left(x^2+1\right)^5}$

II.

On reste le plus possible en forme exponentielle.

1°)

$z_1 = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta}$ $\qquad$ $z_2 = -3\,e^{\mathrm{i}\theta}$ $\qquad$ $z_3 = -2\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\theta}$

$z_1 = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ $\qquad$ $z_2 = 3e^{\mathrm{i}(\pi+\theta)}$ $\qquad$ $z_3 = 2e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$

On a : $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta} \\ &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,e^{\mathrm{i}\theta} \\ &= e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -3\,e^{\mathrm{i}\theta} \\ &= 3e^{\mathrm{i}\pi}\times e^{\mathrm{i}\theta} \\ &= 3e^{\mathrm{i}(\pi+\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= -2\mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= 2e^{\mathrm{i}\pi}\times e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\times e^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= 2e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)} \end{aligned}$$

2°)

$z_4 = {z_1}^4{z_2}^2$ $\qquad$ $z_5 = z_2z_3$ $\qquad$ $z_6 = -\dfrac{1}{z_2}$

$z_4 = 9e^{\mathrm{i}6\theta}$ $\qquad$ $z_5 = 6\mathrm{i}$ $\qquad$ $z_6 = \dfrac{1}{3}e^{-\mathrm{i}\theta}$

On repart avec les formes de base permettant de définir tous ces nombres complexes.

$$\begin{aligned} z_4 &= {z_1}^4{z_2}^2 \\ &= \left(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\right)^4\left(-3e^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 \\ &= \mathrm{i}^4e^{\mathrm{i}4\theta}\times 9e^{2\mathrm{i}\theta} \\ &= e^{\mathrm{i}4\theta}\times 9e^{2\mathrm{i}\theta} \\ &= 9e^{\mathrm{i}6\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= z_2z_3 \\ &= \left(-3e^{\mathrm{i}\theta}\right)\times\left(-2\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\right) \\ &= 6\mathrm{i}\times e^{\mathrm{i}(\theta-\theta)} \\ &= 6\mathrm{i}\times e^{\mathrm{i}0} \\ &= 6\mathrm{i}\times 1 \\ &= 6\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6 &= -\frac{1}{z_2} \\ &= -\frac{1}{-3e^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= \frac{1}{3e^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= \frac{1}{3}e^{-\mathrm{i}\theta} \end{aligned}$$

3°) $z_7 = 1 - e^{i\theta}$

Démontrons que $\overline{z_7} = 1 - e^{-i\theta}$.

On évite de repasser par l'écriture trigonométrique.

$$\begin{aligned}\overline{z_7} &= \overline{1 - e^{i\theta}}\\ &= \overline{1} - \overline{e^{i\theta}}\\ &= 1 - e^{-i\theta}\end{aligned}$$

III.

$a \in \mathbb{C}^*$

$A(a)$; $B(ia)$

Démontrons que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

On pose : $Z = \dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}$.

On a : $Z = \dfrac{ia}{a}$

$Z = i$

• Module de Z :

D'une part, $|Z| = |i| = 1$.

D'autre part, $|Z| = \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right| = \dfrac{|z_{\overrightarrow{OB}}|}{|z_{\overrightarrow{OA}}|} = \dfrac{OB}{OA}$.

Donc $\dfrac{OB}{OA} = 1$ d'où $OA = OB$.

On en déduit que le triangle OAB est isocèle en O.

• Argument de Z :

D'une part, on a : $\arg Z = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$ (2π).

D'autre part, $\arg Z = \arg \dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right)$.

Donc $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π).

On en déduit que le triangle OAB est rectangle en O.

Conclusion :

Le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

IV.

$A(4)$

1°) $\boldsymbol{E = \left\{ M(z) \in P \,/\, \arg(z-4) = \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \right\}}$

Pour $z \neq 4$, on a :

$$\begin{aligned}\arg(z-4) &= \arg(z - z_A)\\ &= \arg(z_M - z_A)\\ &= \arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right)\\ &= \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}\right)\end{aligned}$$

$$M \in E \Leftrightarrow \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

L'ensemble E est la demi-droite ouverte d'origine A, perpendiculaire à l'axe des abscisses, située dans le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses.

2°) $\boldsymbol{F = \left\{ M(z) \in P \,/\, \arg \dfrac{z}{z-4} = \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \right\}}$

Pour $z \neq 4$ et $z \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\arg \frac{z}{z-4} &= \arg\left(\frac{z_M - z_O}{z_M - z_A}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{OM}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MO}\right)\end{aligned}$$

$$M \in F \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MO}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

L'ensemble F est le demi-cercle de diamètre [OA] situé dans le demi-plan au-dessous de l'axe des abscisses, privé des points O et A.

Commentaires :

On sait que l'ensemble des points M tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MO}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (2π) est un demi-cercle de diamètre [OA], privé de O et A.

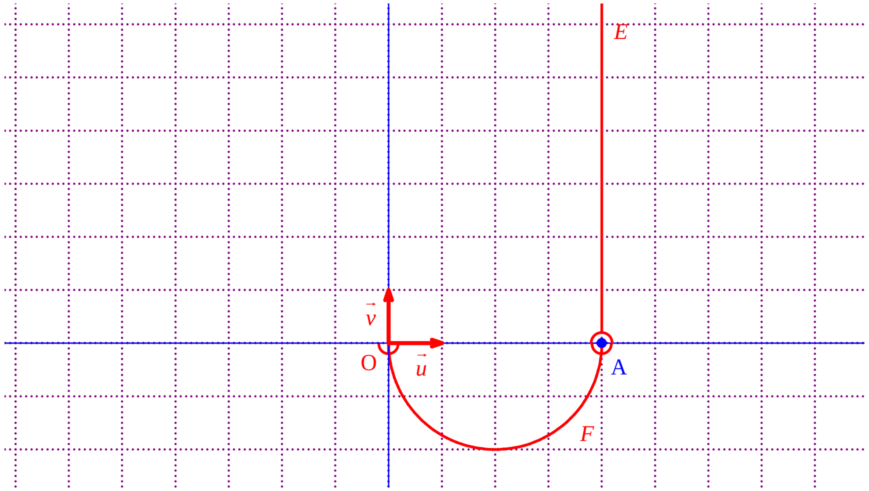
Pour caractériser ce demi-cercle, on utiliser la figure en plaçant un point M quelconque sur l'un des demi-cercles.

On constate que :

- si M appartient au demi-cercle supérieur, alors $\left(\overrightarrow{\text{MA}}\,;\overrightarrow{\text{MO}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$;

- si M appartient au demi-cercle inférieur, alors $\left(\overrightarrow{\text{MA}}\,;\overrightarrow{\text{MO}}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

On est obligé de priver le demi-cercle des points O et A car si M est confondu avec O ou A, alors l'un des deux vecteurs qui intervient dans l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{MA}}\,;\overrightarrow{\text{MO}}\right)$ est nul, ce qui n'est pas possible (l'angle orienté de deux vecteurs n'est pas défini lorsque l'un des deux vecteurs est nul).



Bonus

$z\in\mathbb{C}\setminus\{\text{i}\,;-\text{i}\}$ et $|z|=1$

$$Z=\frac{z}{1+z^2}$$

Démontrons que *Z* est un réel.

1ère méthode :

$$\overline{Z}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

$$=\frac{\overline{z}}{\overline{1+z^2}}$$

$$=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z^2}}$$

$$=\frac{\overline{z}}{1+\left(\overline{z}\right)^2}$$

Or $|z|=1$ donc $z\overline{z}=1$ (car $|z|^2=z\overline{z}$) donc $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

$$\overline{Z}=\frac{\frac{1}{z}}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{z^2+1}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{z}\times\frac{z^2}{z^2+1}$$

$$=\frac{z}{z^2+1}$$

$$=Z$$

On a : $Z=\overline{Z}$ donc Z est réel.

2[e] méthode :

On note θ un argument de z.

Comme $|\,z\,|=1$, on peut donner la forme exponentielle de z : $z=1\times e^{i\theta}$ soit $z=e^{i\theta}$.

$$Z=\frac{z}{1+z^2}$$

$$=\frac{e^{i\theta}}{1+\left(e^{i\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{e^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}}$$

$$=\frac{\cancel{e^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}\left(\frac{1}{e^{i\theta}}+e^{i\theta}\right)}$$

$$=\frac{1}{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\theta}\quad\text{(formule d'Euler)}$$

Cette dernière égalité montre que Z est réel.