TS1 Devoir pour le lundi 18 mars 2013

I.

1°) Donner la forme exponentielle de $4\sqrt{2}\,(-1+\mathrm{i})$.

2°) Trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 ont pour produit $4\sqrt{2}\,(-1+\mathrm{i})$.
Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2.

Leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{4}$.

De plus, z_1 a un argument dans l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$.

Déterminer les modules et un argument de z_1, z_2, z_3.

II.

Soit z un nombre complexe de module 1 et distinct de 1.

On se propose de démontrer que le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

1ère méthode :

1°) Démontrer que l'on a : $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

2°) Démontrer le résultat demandé en utilisant le conjugué.

2e méthode :

On note θ un argument de z. On a donc $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

1°) Démontrer que l'on a : $z+1=2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $z-1=2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

2°) Démontrer le résultat demandé.

Corrigé du DM pour le 13 mars 2013

I.

1°) **Donnons la forme exponentielle de $4\sqrt{2}\,(-1+\text{i})$.**

$$\begin{aligned}4\sqrt{2}\,(-1+\text{i}) &= 8\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\text{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\\ &= 8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= 8\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}\end{aligned}$$

2°) **Déterminons les modules et un argument de z_1, z_2, z_3.**

Notons r le module de z_1.

$|\,z_1\,| = r$

$|\,z_2\,| = 2r$

$|\,z_3\,| = 4r$

Notons θ l'argument de z_1 appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

$\arg z_1 = \theta \quad (2\pi)$

$\arg z_2 = \theta + \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

$\arg z_3 = \theta + \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

On sait que $z_1 z_2 z_3 = 4\sqrt{2}\,(-1+\text{i})$.

On a donc $r\text{e}^{\text{i}\theta}\times 2r\text{e}^{\text{i}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\times 4r\text{e}^{\text{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$ soit $8r^3\text{e}^{\text{i}\left(3\theta+\frac{3\pi}{4}\right)} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

On en déduit que $\begin{cases} 8r^3 = 8 \\ 3\theta+\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} r^3 = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ soit $\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ car $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Conclusion :

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$z_3 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

II.

$z \in \mathbb{C} \setminus \{ 1 \} \quad | z | = 1$

1ère méthode :

1°) **Démontrer que l'on a : $\bar{z} = \frac{1}{z}$.**

$| z | = 1$ donc $| z |^2 = 1$ soit $z\bar{z} = 1$ d'où $\bar{z} = \frac{1}{z}$

2°) **Démontrons que *Z* est un imaginaire pur.**

$$\begin{aligned}
\bar{Z} &= \overline{\frac{z+1}{z-1}} \\
&= \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \\
&= \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} \\
&= \frac{1+z}{1-z} \\
&= -\frac{z+1}{z-1} \\
&= -Z
\end{aligned}$$

On en déduit que *Z* est imaginaire pur.

2^{e} méthode :

$z = e^{i\theta}$

1°) **Démontrons que $z+1 = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z-1 = 2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$.**

$$\begin{aligned} z+1 &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z-1 &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= 2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

2°) **Démontrons que Z est un imaginaire pur.**

$$Z = \frac{z+1}{z-1}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$$= -i \times \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= -i \times \tan\frac{\theta}{2}$$

On en déduit que Z est imaginaire pur.